В В Е Д Е Н И Е . А к с и о м ы с т е р е о м е т р и и и и х с л е д с т в и е . 5 ч а с о в

У р о к 1

ПРЕДМЕТ СТЕРЕОМЕТРИИ. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

Ц е л ь : рассмотреть основные свойства плоскости.

Х о д у р о к а

I. Вступительная беседа.

В планиметрии все фигуры, которые рассматривались при доказательстве каждой теоремы или при решении задач, располагались на плоскости (на листе бумаги или на доске и т. д.). Таким образом, мы имели дело только с одной плоскостью, и все точки, линии, углы, вообще геометрические фигуры лежали только на ней.

В курсе стереометрии нам предстоит рассматривать такие случаи, когда не все точки, линии и углы данной или данных фигур будут располагаться на одной плоскости. Будем считать, например, поверхность стола моделью плоскости *P*; возьмем куб и поставим его одной гранью на стол. Легко видеть, что в данном кубе:

1) имеются точки, ребра, углы, лежащие на данной плоскости *P* (на столе);

2) имеются точки, которые находятся вне плоскости *P*;

3) имеются ребра, пересекающие плоскость *P*;

4) имеются углы, находящиеся вне плоскости *P*;

5) имеются шесть граней, являющиеся моделями шести различных плоскостей.

В ы в о д . Плоскости могут вступать во взаимодействие с другими элементами фигур и друг с другом.

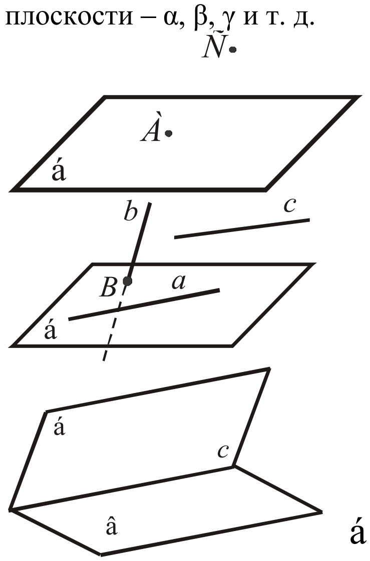
Отсюда вытекает необходимость изучать различные случаи комбинаций плоскостей между собой, комбинации плоскостей с линиями и другими геометрическими объектами. Это изучение является одной из задач курса стереометрии. В первую очередь надо выяснить основные свойства плоскостей по отношению друг к другу, к точкам и прямым.

Введем обозначения:

точки – *A*, *B*, *C* и т. д.

прямые – *a*, *b*, *c* и т. д. или (*AB*, *CD* и т. д.)

плоскости – α, β, γ и т. д.



$A \in$ á

$C \notin$ á

$a \in$ á

$b \cap$ á $= B$

$c \notin$ á

á $\cap$ â $= c$

II. Основные свойства плоскости.

Всем знакома ситуация: если ножки стула не одинаковые по длине, то стул стоит на трех ножках, то есть опирается на три «точки», а конец четвертой ножки (четвертая «точка») не лежит в плоскости пола, а висит в воздухе.

Этот пример служит наглядным подтверждением того факта, что **через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.**

Так как три точки, не лежащие на одной прямой, однозначно определяют плоскость, то можно обозначать плоскость как (*ABC*), (*BCD*) и т. д.

Можно ли провести плоскость через три точки, лежащие на одной прямой? Сколько существует таких плоскостей?

Верно ли, что:

а) любые три точки лежат в одной плоскости;

б) любые четыре точки лежат в одной плоскости;

в) любые четыре точки не лежат в одной плоскости;

г) через любые три точки проходит плоскость, и притом только одна?

О т в е т ы : а) да; б) нет; в) нет; г) нет.

Рассмотрим следующую ситуацию: для проверки «ровности» при укладке тротуарной плитки используют брусок, который прикладывают к поверхности дорожки. Если на дорожке есть ложбинки или бугорок, то в каких-то местах между бруском и плоскостью дорожки образуется просвет. Если поверхность дорожки ровная, то между бруском и дорожкой никакого просвета нет, то есть брусок всеми своими точками прилегает к ее поверхности.

Можно встретить и обратную ситуацию, когда проверяют «ровность» линейки при помощи проверенной модели плоскости.

Эти примеры служат наглядным подтверждением того факта, что **если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.**

Верно ли, что прямая лежит в плоскости данного треугольника, если она:

а) пересекает две стороны треугольника;

б) проходит через одну из вершин треугольника?

Ответ обоснуйте.

Обратимся к модели куба.

Учащимся прелагается на модели куба указать:

1) точку, принадлежащую одновременно двум данным пересекающимся граням;

2) точку, принадлежащую трем данным пересекающимся граням;

3) грани, которым принадлежит точка, взятая на каком-нибудь ребре куба;

4) грани, которым принадлежит данная вершина куба.

В ы в о д . Точка, лежащая на линии пересечения двух плоскостей, лежит на каждой из этих плоскостей, и обратно: точка, лежащая одновременно на двух каких-нибудь плоскостях, лежит на линии пересечения этих плоскостей.

На вопрос, что является линией пересечения двух плоскостей (в теоретико-множественном смысле: если прямые имеют хотя бы одну общую точку), отвечает третья аксиома: **если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через данную точку.**

Наглядной иллюстрацией третьей аксиомы является пересечение двух смежных сторон классной комнаты, пересечение двух листов книги и т. д.

Могут ли две пересекающиеся плоскости иметь общую точку, не принадлежащую линии пересечения этих плоскостей?

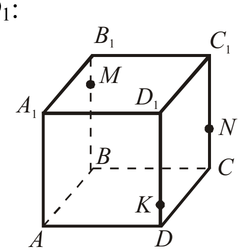
Прямые a и b пересекаются в точке C. Через прямую a проходит плоскость α, а через прямую b – плоскость β, отличная от α. Как проходит линия пересечения этих плоскостей?

Следует обязательно отметить, что в пространстве существует бесконечно много плоскостей, и **в каждой плоскости справедливы все аксиомы и теоремы планиметрии.**

III. Решение задач.

№ 9 (перечертите чертеж и ответы запишите с помощью символики).

Постройте изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$:



а) назовите плоскости, в которых лежат точка M, точка N;

б) найдите точку F – точку пересечения прямых MN и BC. Каким свойством обладает точка F? (Принадлежит и прямой MN, и плоскости (ABC));

в) найдите точку пересечения прямой KN и плоскости (ABC).

Домашнее задание: теория (п. 1 – 2), № 1 (перечертите чертеж и ответы запишите с помощью символики), №№ 3, 10, 12, 13.

Урок 2
НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ

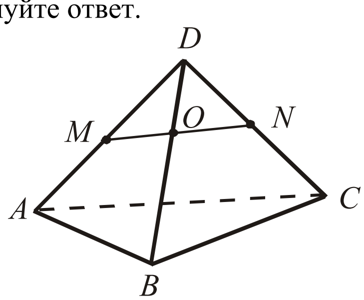
Цель: доказать некоторые следствия из аксиом.

Ход урока

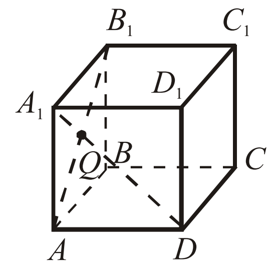
I. Проверка домашнего задания (фронтальная).

II. Устная работа.

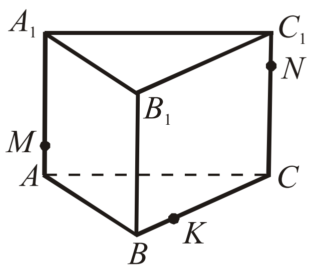
Найдите ошибку. Обоснуйте ответ.



$MN \cap BD = O$



$AB_1 \cap A_1D = Q$



По чертежу назовите:

а) линию пересечения плоскостей (ABC) и (AA_1B_1);

б) плоскости, которым принадлежат точка M, точка B;

в) плоскость, в которой лежит прямая MN; прямая KN.

Постройте:

а) точку пересечения прямой MN и плоскости (ABC);

б) точку пересечения прямой MN и плоскости ($A_1B_1C_1$);

в) линию пересечения плоскостей (ABC) и (MNK);

г) точку пересечения прямой KN с плоскостью (ABC);

д) линию пересечения плоскостей (AA_1B_1) и (MNK).

Каждый раз при построении аксиомы проговариваются, результат построения записывается с помощью символики.

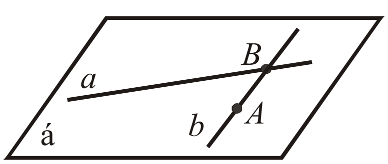
III. Объяснение нового материала строится согласно п. 3 учебника.

IV. Решение задач.

№№ 4, 5, 7, 9, 11.

Образец оформления.

№ 11.



Дано: a, $A \notin a$.

Доказать, что все прямые, проходящие через точку A и пересекающие прямую, лежат в одной плоскости.

Доказательство

1. Проведем плоскость α = (a, A).
2. Проведем b: $A \in b$, $b \cap a = B$.
3. $\left.\begin{array}{l} A \in b \\ B \in b \\ A \in \alpha \\ B \in \alpha \end{array}\right| \Rightarrow b \in \alpha.$

Аналогично, любая другая прямая, удовлетворяющая условию задачи, принадлежит плоскости α.

Домашнее задание: теория (п. 3), №№ 6, 8, 14, 15.

Урок 3
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРИМЕНЕНИЕ АКСИОМ СТЕРЕОМЕТРИИ И ИХ СЛЕДСТВИЙ

Цель: сформировать навык применения аксиом стереометрии и их следствий при решении задач.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания.

II. Устная работа.

1. Заполните пропуски, чтобы получилось верное утверждение:

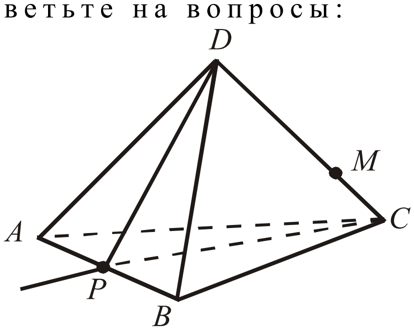
а) если $A \in a$, $a \in \alpha$, то $A ... \alpha$.

б) если $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$, то $AB ... \alpha$.

в) если $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in AB$, то $C ... \alpha$.

г) если $M \in \alpha$, $M \in \beta$, $\alpha \cap \beta = a$, то $M ... a$.

2. По рисунку ответьте на вопросы:



а) каким плоскостям принадлежат точки *A*, *M*, *K*, *D*, *P*?

б) каким плоскостям не принадлежат точки *M*, *K*, *A*, *P*, *D*?

в) каким плоскостям принадлежат прямые *DB*, *DK*, *AB*, *PC*, *AC*?

г) в какой точке пересекаются прямая *AD* и плоскость (*ABC*); *BD* и (*ADC*); *DK* и (*ABC*); *AB* и (*PDC*)?

д) по какой прямой пересекаются плоскости (*ABD*) и (*BDC*); (*ABC*) и (*ADC*); (*ABC*) и (*ABD*); (*ABD*) и (*ADC*); (*PDC*) и (*ABC*)?

3. Ответьте на вопросы:

а) могут ли прямая и плоскость иметь только одну общую точку? *(Да.)* Только две общие точки? *(Нет.)*

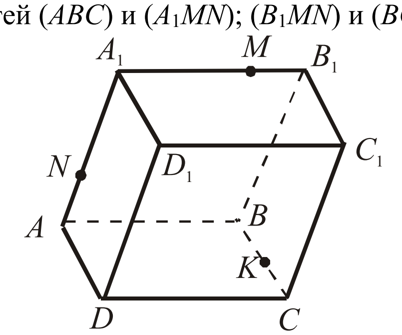
б) можно ли провести плоскость через четыре произвольные точки пространства? *(Нет.)*

в) можно ли через точку пересечения двух прямых провести третью прямую, не лежащую с ними в одной плоскости? *(Да.)*

III. Решение задач.

1. Начертите изображение тетраэдра *ABCD*, выберите произвольно точки $M \in AB$, $N \in AD$. Постройте линии пересечения плоскостей (*ABD*) и (*CMN*); (*CMN*) и (*ABC*); (*CMN*) и (*ADC*).

2. Начертите изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, выберите точки *M* и *N* грани *ABCD*. Постройте линии пересечения плоскостей (*ABC*) и (A_1MN); (B_1MN) и (BCC_1); (C_1MN) и (CC_1D).



3. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. $M \in A_1B_1$. $N \in AA_1$. $K \in BC$.

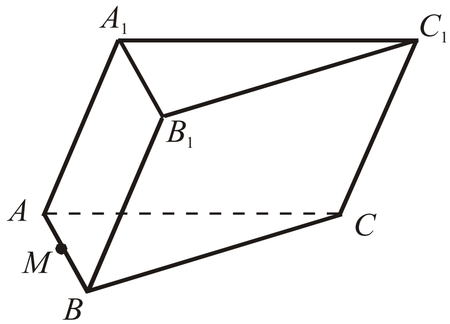
Постройте сечение параллелепипеда плоскостью (*MNK*).

Замечание. В курсе основной школы вы получили представление о многограннике как о геометрическом теле, поверхность которого состоит из многоугольников.

Рассмотрим пересечение некоторого многогранника, например куба, и плоскости α; оно может быть пустым множеством, точкой, отрезком, многоугольником. Если пересечение многогранника и плоскости есть многоугольник, то этот многоугольник называется сечением многогранника данной плоскостью.

Домашнее задание:

1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма. $M \in AB$.



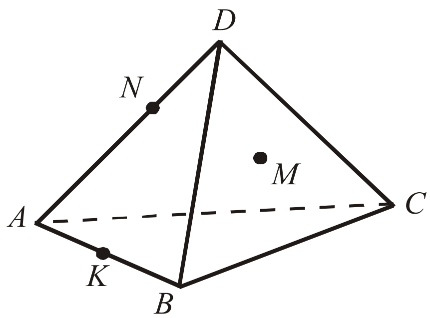
Постройте:

а) точку пересечения прямой A_1M и плоскости (BB_1C_1);

б) линию пересечения плоскостей (A_1MC_1) и (BB_1C_1);

в) линию пересечения плоскостей (A_1MC_1) и (ABC);

г) сечение призмы плоскостью (A_1MC_1).



2. Д а н о : $ABCD$ – пирамида.

$M \in (BDC)$, $N \in AD$, $K \in AB$.

Постройте сечение пирамиды плоскостью (MNK).

У р о к 4
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРИМЕНЕНИЕ АКСИОМ СТЕРЕОМЕТРИИ И ИХ СЛЕДСТВИЙ

Ц е л ь : сформировать навык применения аксиом стереометрии и их следствий.

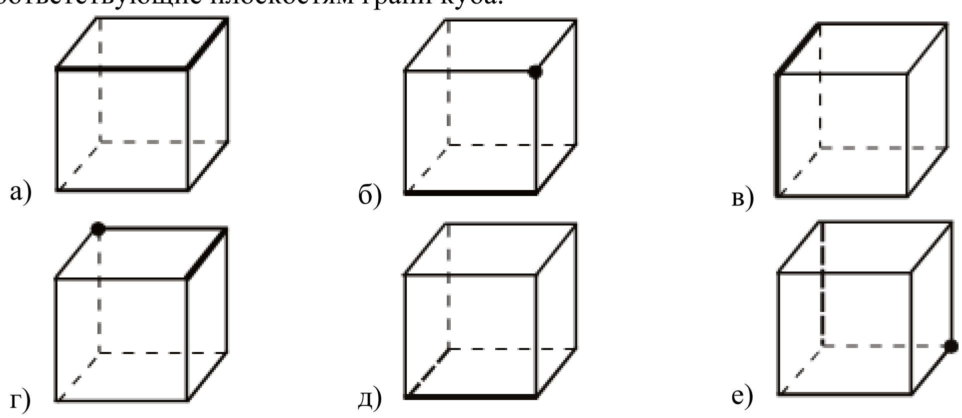
Х о д у р о к а

I. Проверка домашнего задания.

II. Устная работа.

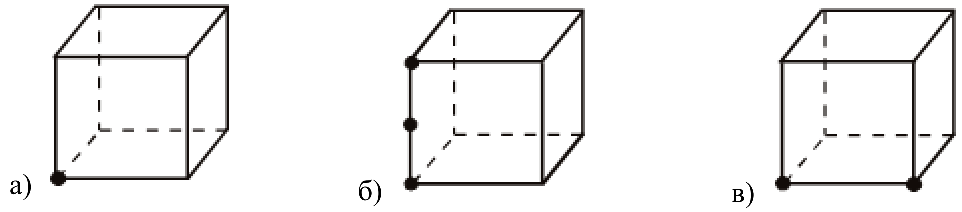
1. П е р е ч и с л и т е несколько способов задания плоскости.

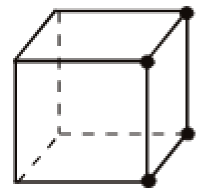
2. Сколько плоскостей можно провести через выделенные элементы куба? Заштрихуйте соответствующие плоскостям грани куба.



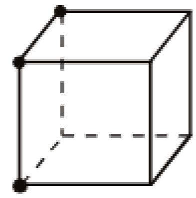
3. Сколько граней проходит через а) одну, б) две, в) три, г) четыре точки, выделенные на рисунке куба?

Сколько плоскостей можно провести через те же точки? Определится ли при этом положение плоскости однозначно? Ответ обоснуйте.

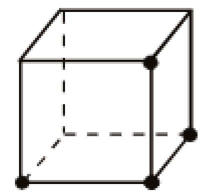




г)



д)



е)

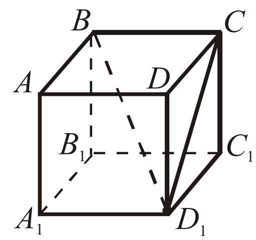
4. Если прямая пересекает две стороны квадрата (смежные, противоположные), то она лежит в плоскости этого квадрата?

5. Если две точки окружности лежат в одной плоскости, то и вся окружность лежит в этой плоскости?

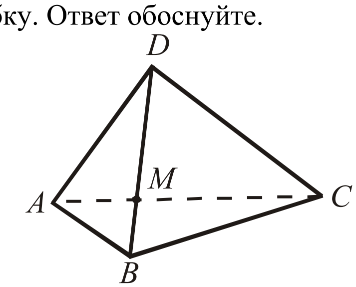
6. Если два диаметра окружности принадлежат одной плоскости, то и вся окружность принадлежит этой плоскости?

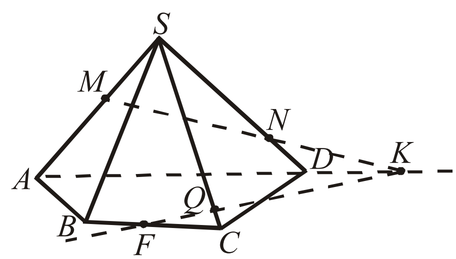
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Верно ли, что плоскости (BCD_1) и $(B_1C_1D_1)$ имеют одну общую точку?

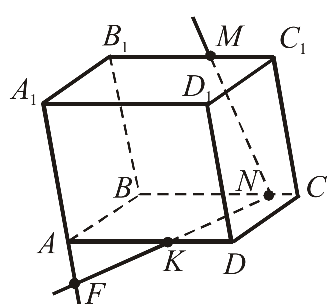
Назовите линию пересечения этих плоскостей. Через какую точку она проходит?

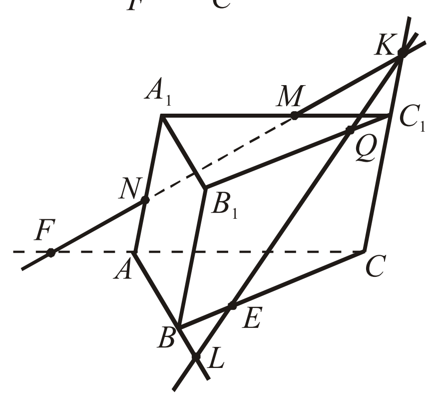


8. Найдите ошибку. Ответ обоснуйте.









III. Решение задач.

Постройте изображение тетраэдра (треугольной призмы, четырехугольной пирамиды, четырехугольной призмы). Отметьте произвольно точки M, N, и K на ребрах многогранника. Постройте сечение многогранника плоскостью (MNK).

Домашнее задание аналогичное. Подготовить теорию к зачету (п. 1 – 3).

Урок 5

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРИМЕНЕНИЕ АКСИОМ СТЕРЕОМЕТРИИ И ИХ СЛЕДСТВИЙ

Цель: проверить знание учащимися аксиом стереометрии и их следствий и уровень сформированности навыка их применения при решении задач.

Ход урока

Вариант I

1. Точки A, B и C не лежат на одной прямой. $M \in AB$, $K \in AC$, $X \in MK$. Докажите, что точка X лежит в плоскости (ABC).

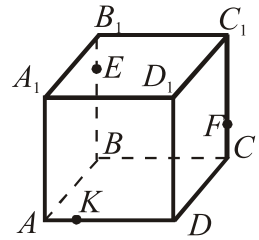
2. Плоскости α и β пересекаются по прямой m. Прямая a лежит в плоскости α и пересекает плоскость β. Пересекаются ли прямые a и m? Почему?

3. Постройте:

а) точки пересечения прямой EF с плоскостями (ABC) и $(A_1B_1C_1)$;

б) линию пересечения плоскостей (EFK) и (ABC);

в) сечение многогранника плоскостью (EFK).



Вариант II

1. Прямые a и b пересекаются в точке O. $A \in a$, $B \in b$; $Y \in AB$. Докажите, что прямые a и b и точка Y лежат в одной плоскости.

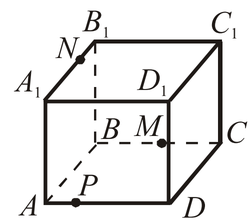
2. Даны пересекающиеся плоскости α и β. Прямая a лежит в плоскости α и пересекает плоскость β в точке A. Прямая b лежит в плоскости β и пересекает плоскость α в точке B. Докажите, что AB – линия пересечения плоскостей α и β.

3. Постройте:

а) точки пересечения прямой PM с плоскостями (DCC_1) и (AA_1B_1);

б) линию пересечения плоскостей (MNP) и (AA_1B_1);

в) сечение многогранника плоскостью (MNP).



ГЛАВА 2. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ.

Урок 1

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Цели: рассмотреть взаимное расположение двух прямых в пространстве; ввести понятие параллельных и скрещивающихся прямых.

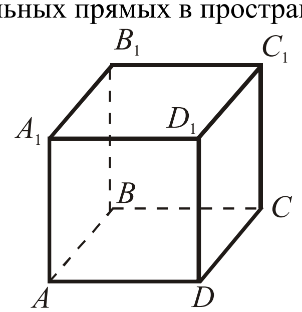
Ход урока

I. Объяснение нового материала.

Каково может быть взаимное расположение двух прямых на плоскости (совпадают, пересекаются, являются параллельными)? Дайте определение параллельных прямых на плоскости.

$$\left(a \parallel b \Rightarrow \begin{array}{l} a \in \alpha,\ b \in \alpha \\ a \not\cap b \end{array} \right)$$

Определение параллельных прямых в пространстве – то же.



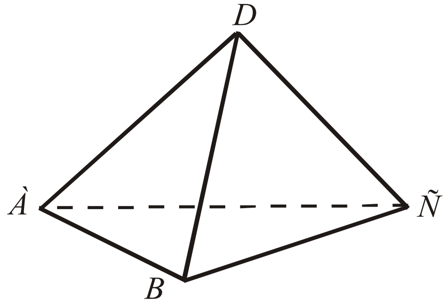
Дан куб. Все грани – квадраты.

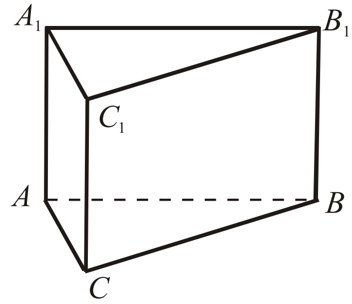
Являются ли параллельными прямые AA_1 и DD_1, AA_1 и CC_1? Ответ обоснуйте. А прямые AA_1 и DC параллельны? Они пересекаются?

Значит, в пространстве есть прямые, которые не пересекаются, но не являются параллельными, так как не лежат в одной плоскости. Такие прямые называются скрещивающимися ($a \div b$).

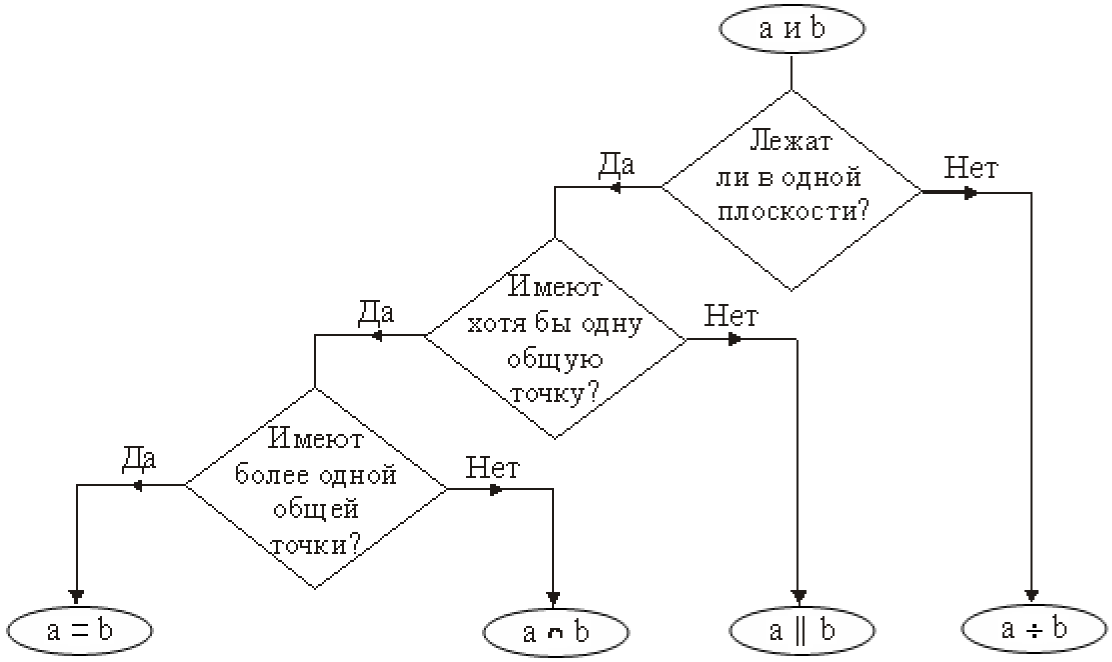
Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

По рисунку назовите пары скрещивающихся ребер; пары параллельных ребер.





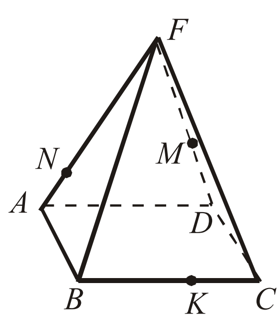
Итак, алгоритм распознавания взаимного расположения двух прямых в пространстве.

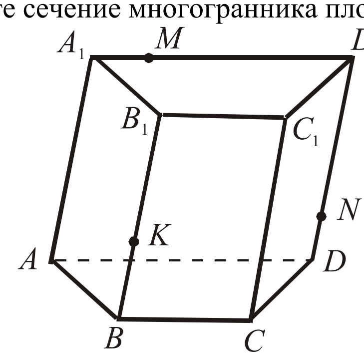


II. Решение задач.

1. Всегда ли две непересекающиеся прямые в пространстве параллельны? *(Устно.)*
2. Какие две прямые называются параллельными? *(Устно.)*
3. Дано $a \parallel b$. Докажите, что все прямые, пересекающие данные, лежат в одной плоскости.
4. Сколько можно провести в пространстве прямых, проходящих через данную точку, параллельных данной прямой? (п. 4).

Домашнее задание: теория (п. 4), №№ 16, 89. Постройте сечение многогранника плоскостью (MNK).





Урок 2
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ТРЕХ ПРЯМЫХ

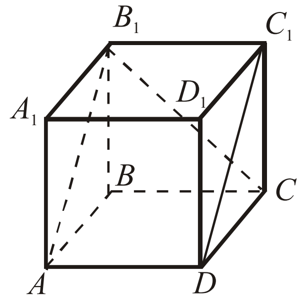
Цели: доказать лемму о пересечении плоскости параллельными прямыми, теорему о трех параллельных прямых; показать их применение при решении задач.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания (у доски).

II. Устная работа.

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Все грани – квадраты. Установите взаимное расположение прямых.

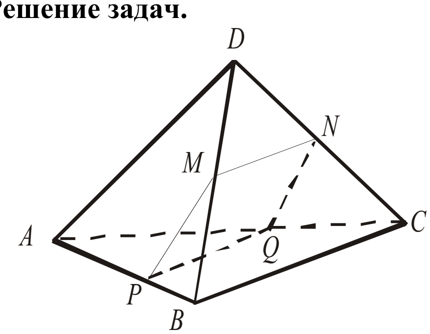


$AD \ldots A_1D_1$
$AD \ldots B_1C_1$
$AB_1 \ldots B_1C_1$
$AB_1 \ldots DC_1$
$B_1C_1 \ldots DC_1$
$BB_1 \ldots DC$

2. Какие прямые называются параллельными? Скрещивающимися?

III. Объяснение нового материала построить в соответствии с п. 5 учебника.

IV. Решение задач.



№ 17.

Д а н о : $DM = MB$, $DN = NC$, $AQ = QC$, $AP = PB$, $AD = 12$, $BC = 14$.

Найдите P_{MNQP}.

Р е ш е н и е

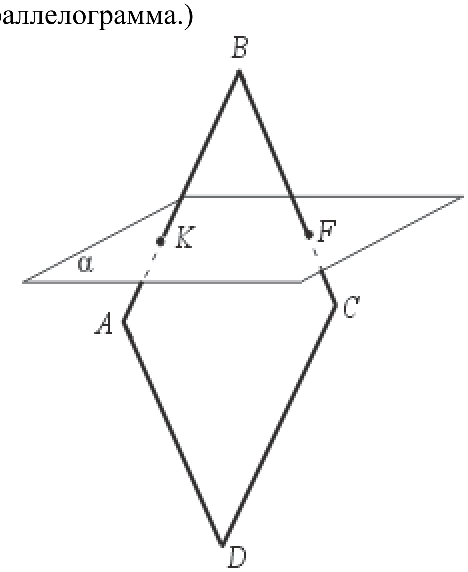
1. $\left.\begin{array}{l} MN \parallel BC \ \text{(по свойству средней линии)} \\ PQ \parallel BC \ \text{(по свойству средней линии)} \end{array}\right| \Rightarrow MN \parallel PQ.$

2. $\left.\begin{array}{l} PM \parallel AD \ \text{(по свойству средней линии)} \\ QN \parallel AD \ \text{(по свойству средней линии)} \end{array}\right| \Rightarrow PM \parallel QN.$

3. По определению $MNQP$ – параллелограмм.

4. $PQ = 7$, $PM = 6$ $\Rightarrow$ $P_{MNQP} = 2\,(7 + 6) = 26$.

(Докажите устно, несколькими способами, что $MNQP$ – параллелограмм. Используя признаки параллелограмма.)



№ 19.

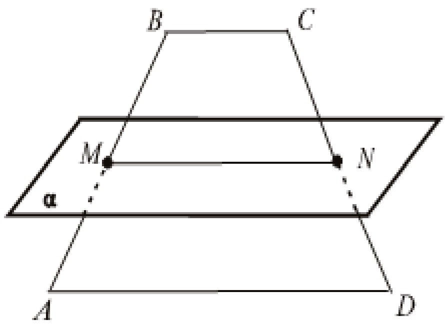
Д а н о : $ABCD$ – параллелограмм, $AB \cap \alpha = K$, $BC \cap \alpha = F$.

Доказать, что $AD \cap \alpha$, $DC \cap \alpha$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

1. $\left.\begin{array}{l} AB \cap \alpha \\ AB \parallel DC \end{array}\right| \Rightarrow \text{по лемме } DC \cap \alpha.$

2. Аналогично, $AD \cap \alpha$.



№ 20.

Д а н о : $ABCD$ – трапеция, MN – средняя линия, $MN \in \alpha$.

Доказать: пересекают ли BC и AD плоскость α?

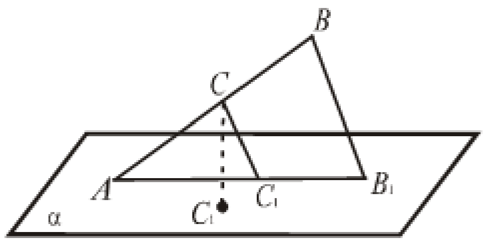
Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть $BC \cap \alpha$, тогда

$$\left.\begin{array}{l} BC \cap \alpha \\ BC \parallel MN \end{array}\right| \Rightarrow MN \cap \alpha.$$

Получили противоречие, так как $MN \in \alpha$. Следовательно, $BC \not\cap \alpha$.

Аналогично $AD \not\cap \alpha$.



№ 18 (а).

Д а н о : $A \in \alpha$, $CC_1 \parallel BB_1$, $AC = CB$, $BB_1 = 7$.

Найдите CC_1.

Р е ш е н и е

I. Необходимо доказать, что точки A, C_1 и B_1 лежат на одной прямой.

1. $(A, BB_1) \equiv \beta$.

2. $\beta \cap \alpha = AB_1$. Докажем, что $C_1 \in AB_1$.

3. Пусть $C_1 \notin AB_1$, тогда $CC_1 \cap \beta = C$.

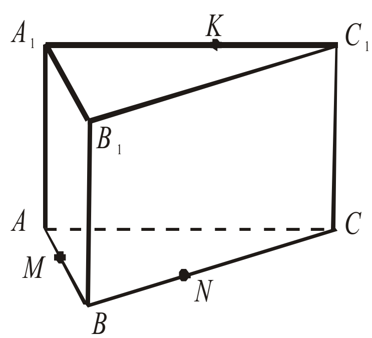
$$\left.\begin{array}{l} CC_1 \parallel BB_1 \\ CC_1 \cap \beta \end{array}\right| \Rightarrow BB_1 \cap \beta.$$

Противоречие условию, $BB_1 \in \beta$.

Следовательно, $C_1 \in AB_1$. (Проведите различные доказательства, проводя плоскость β через A и CC_1, через CC_1 и BB_1).

II. CC_1 – средняя линия $\Delta ABB_1 \Rightarrow CC_1 = 3{,}5$.

Домашнее задание: теория (п. 4 – 5), №№ 18 (б), 21, 88. Построить сечение многогранника плоскостью (MNK).



У р о к 3

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ.
ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ТРЕХ ПРЯМЫХ

Ц е л ь : закрепить навык применения теорем о параллельных прямых при решении задач.

Х о д у р о к а

I. Проверка домашнего задания.

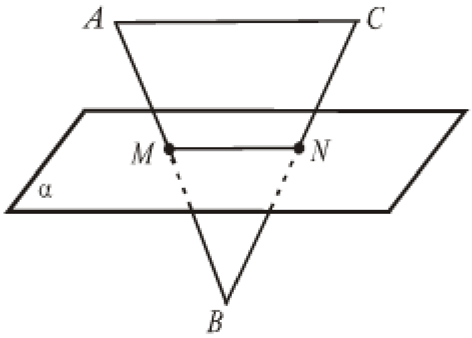
II. Устная работа.

1. Какие прямые в пространстве называются параллельными?

2. Всегда ли через две параллельные прямые можно провести плоскость? А через две непересекающиеся прямые?

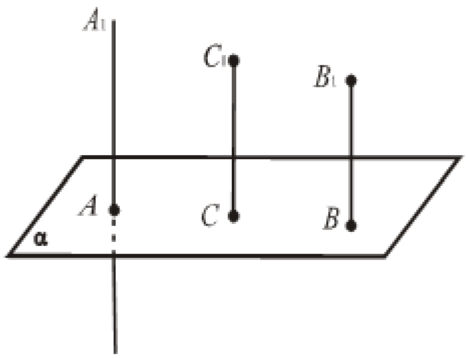
3. В пространстве даны n параллельных между собой прямых. Известно, что никакие три из них не лежат в одной плоскости. Сколько различных плоскостей можно провести через эти прямые?

4. Сформулируйте лемму о пересечении плоскости параллельными прямыми.



5. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, лежит в плоскости α. Пересекает ли третья сторона эту плоскость?

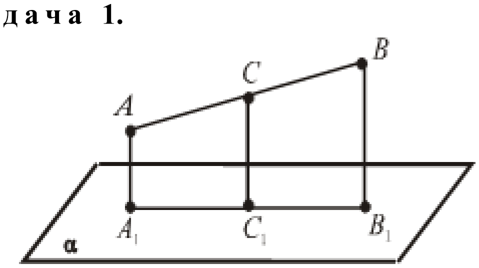
6. Сформулируйте теорему о трех параллельных прямых.



7. Д а н о : $AA_1 \parallel CC_1$,
$AA_1 \parallel BB_1$,
$BB_1 = CC_1$.
Доказать, что $B_1C_1 = BC$.

III. Решение задач.

З а д а ч а 1.



Д а н о : $AB \not\cap \alpha$, $AC = CB$,
$AA_1 \parallel CC_1 \parallel BB_1$,
$AA_1 = 5$, $BB_1 = 7$.
Найти CC_1.

Р е ш е н и е

I. Докажем, что точки A_1, C_1 и B_1 лежат на одной прямой.

1. $(AA_1, BB_1) = \beta$. $\beta \cap \alpha = A_1B_1$. Докажем, что $C_1 \in A_1B_1$.

2. Пусть $C_1 \notin A_1B_1$, тогда $CC_1 \cap \beta = C$.

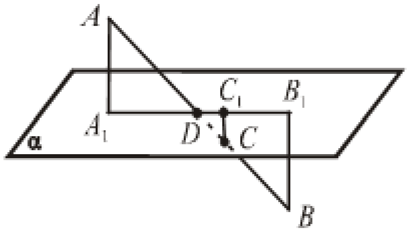
$$\left.\begin{array}{l} CC_1 \cap \beta \\ CC_1 \parallel AA_1 \end{array}\right| \Rightarrow \text{по лемме } AA_1 \cap \beta.$$

Полученное противоречие опровергает наше предположение.
Следовательно, $C_1 \in A_1B_1$.

3. CC_1 – средняя линия трапеции $\Rightarrow CC_1 = \dfrac{5+7}{2} = 6$.

З а д а ч а 2.

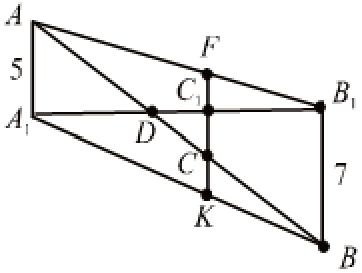
Д а н о : $AB \cap \alpha = D$; $AC = CB$; $AA_1 \parallel CC_1 \parallel BB_1$; $AA_1 = 5$; $BB_1 = 7$.



Найдите CC_1.

Р е ш е н и е

I. Доказать, что точки A_1, C_1, D и B_1 лежат на одной прямой.



II. 1-й с п о с о б.

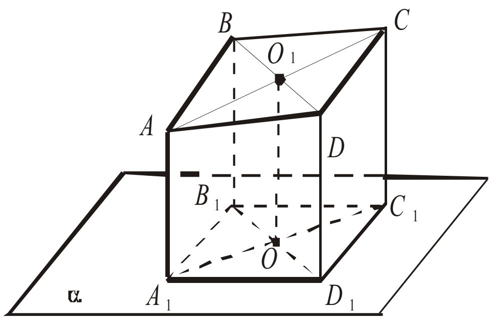
CC_1 – отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.

$CC_1 = \dfrac{7-5}{2} = 1.$

2-й с п о с о б.

$CC_1 = C_1K - CK = \dfrac{1}{2}BB_1 - \dfrac{1}{2}AA_1 = 3{,}5 - 2{,}5 = 1.$

З а д а ч а 3.



Д а н о : $ABCD$ – параллелограмм,
$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$,
$AA_1 = 2$, $BB_1 = 3$, $CC_1 = 8$.
Найдите DD_1.

З а д а ч а 4.

Точка C лежит на отрезке AB. Через точку A проведена плоскость, а через точки B и C – параллельные прямые, пересекающие эту плоскость соответственно в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка BB_1, если:

а) $CC_1 = 8{,}1$, $AB : AC = 11 : 9$;

б) $AB = 6$, $AC : CC_1 = 2 : 5$;

в) $AC = a$, $BC = b$, $CC_1 = c$.

ДОМАШНЯЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

В а р и а н т I

1. Точки K, M, P, T не лежат в одной плоскости. Могут ли прямые KM и PT пересекаться? Обоснуйте ответ.

2. Через точки A, B и середину M отрезка AB проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость α в точках A_1, B_1, M_1 соответственно. Найдите длину отрезка MM_1, если $AA_1 = 13$ м, $BB_1 = 7$ м, причем отрезок AB не пересекает плоскость α.

3. Точка P не лежит в плоскости трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков PB и PC, параллельна средней линии трапеции.

В а р и а н т II

1. Прямые EN и KM не лежат в одной плоскости. Могут ли прямые EM и NK пересекаться? Обоснуйте ответ.

2. Через концы A, B и середину M отрезка AB проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость α в точках A_1, B_1, M_1 соответственно. Найдите длину отрезка MM_1, если $AA_1 = 3$ м, $BB_1 = 17$ м, причем отрезок AB не пересекает плоскость α.

3. Точка E не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков EA и EB, параллельна стороне CD параллелограмма.

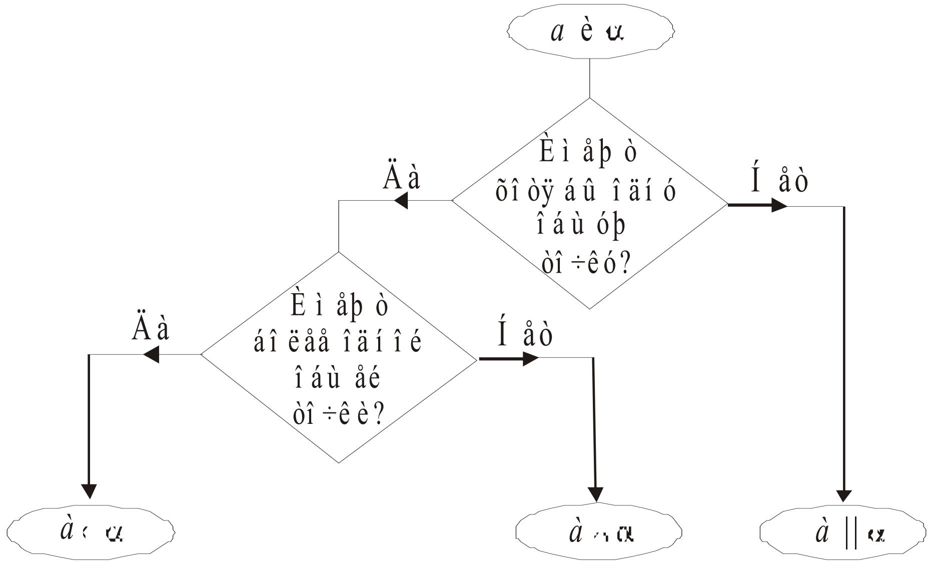
У р о к 4

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Ц е л и : рассмотреть возможные случаи взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве; ввести понятие параллельности прямой и плоскости; доказать признак параллельности прямой и плоскости.

Х о д   у р о к а

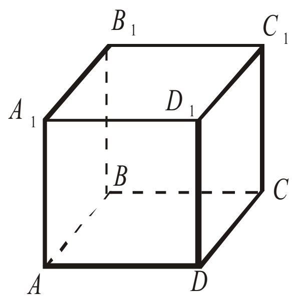
I. Объяснение нового материала начать с рассмотрения взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве.



В каком случае прямая и плоскость называются параллельными?

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Покажите на предметах обстановки классной комнаты прямые, параллельные плоскости пола, плоскости стены.



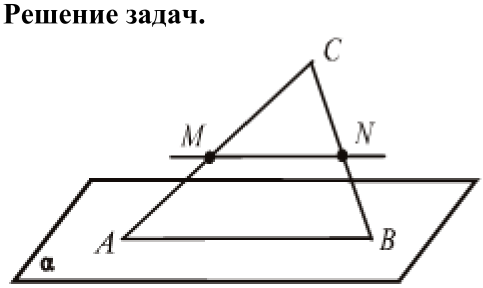
На модели куба укажите плоскости, параллельные прямой DC, прямой DD_1. Как установить параллельность прямой и плоскости? В силу бесконечности прямой и плоскости сделать это по определению очень трудно. Нужен признак параллельности прямой и плоскости.

Обратите внимание на модель куба. $DC \parallel (AA_1B_1)$. В плоскости (AA_1B_1) имеется прямая AB, параллельная DC.

$DC \parallel (A_1B_1C_1)$. В плоскости $(A_1B_1C_1)$ имеется прямая D_1C_1, параллельная DC. Сделайте предположение.

Сформулируйте и докажите признак параллельности прямой и плоскости.

II. Решение задач.

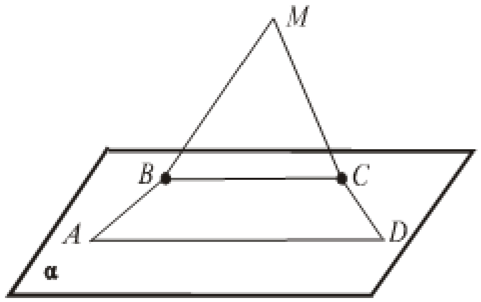


№ 22.

Д а н о : $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$,
$AM = MC$, $BN = NC$.
Доказать, что $MN \parallel \alpha$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

$MN \parallel AB$ (по свойству средней линии)
$AB \in \alpha$
$\Rightarrow MN \parallel \alpha$ по признаку.

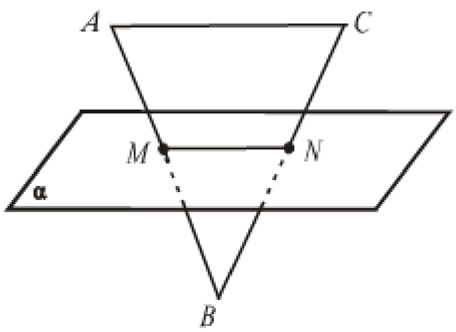


№ 24.
Д а н о : *ABCD* – трапеция,
$M \notin (ABC)$
Доказать, что $AD \parallel (BMC)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

$$\left.\begin{array}{l} AD \parallel BC \text{ (по опред. трапеции)} \\ BC \in (BMC) \end{array}\right| \Rightarrow AD \parallel (BMC)$$

по признаку.



№ 26.
Д а н о : $AC \parallel \alpha$, $AB \cap \alpha = M$,
$CB \cap \alpha = N$.
Доказать, что Δ *ABC* Δ *MBN*.

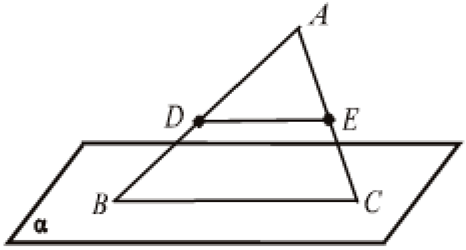
Д о к а з а т е л ь с т в о

Докажем, что $AC \parallel MN$.

1. $$\left.\begin{array}{l} AC \parallel \alpha \\ MN \in \alpha \end{array}\right| \Rightarrow AC \not\cap MN.$$

2. $$\left.\begin{array}{l} \grave{A}\tilde{N} \in (\grave{A}\hat{A}\tilde{N}) \\ MN \in (ABC) \\ AC \not\cap MN \end{array}\right| \Rightarrow AC \parallel MN$$ по определению.

3. Δ *ABC* Δ *MBN* по двум углам.



№ 28.
Д а н о : $D \in AB$, $E \in AC$, $DE = 5$,
$\dfrac{BD}{DA} = \dfrac{2}{3}$, $BC \in \alpha$, $DE \parallel \alpha$.
Найдите *BC*.

Р е ш е н и е

1. $$\left.\begin{array}{l} DE \parallel \alpha \\ BC \in \alpha \end{array}\right| \Rightarrow DE \not\cap BC.$$

2. $$\left.\begin{array}{l} B \quad \in (\qquad) \\ DE \in (ABC) \\ DE \not\cap BC \end{array}\right| \Rightarrow DE \parallel BC$$ по определению.

3. Δ *ABC* Δ *ADE* по двум углам.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}.$$

$$\frac{3}{5} = \frac{5}{\hat{A}\tilde{N}}.$$

$$BC = \frac{25}{3}.$$

Домашнее задание: теория (п. 6), №№ 23, 25, 27.

Урок 5

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Цель: продолжить формирование навыка применять изученные теоремы к решению задач.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания (у доски).

II. Устная работа.

1. Каково может быть взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве?
2. В каком случае прямая и плоскость называются параллельными? Пересекающимися?
3. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.
4. Верно ли утверждение, что если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна ей, то она параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости?
5. Верно ли утверждение, что если две прямые параллельны одной и той же плоскости, то они параллельны между собой?
6. Можно ли построить плоскость, проходящую через данную прямую и параллельную другой данной прямой?
7. Сколько можно провести через данную точку:

а) прямых, параллельных данной плоскости;

б) плоскостей, параллельных данной прямой?

8. Каким может быть взаимное расположение двух прямых, из которых одна параллельна некоторой плоскости, а другая пересекает эту плоскость?

III. Решение задач.

Задача 1.

Доказать, что если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Дано: $a \parallel \alpha$, $a \in \beta$, $\alpha \cap \beta = b$.

Доказать, что $a \parallel b$.

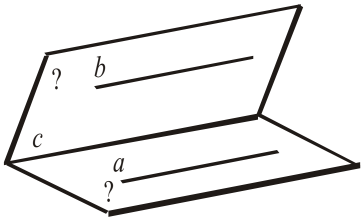
Доказательство

1. $\left.\begin{array}{l} a \parallel \alpha \\ b \in \alpha \end{array}\right| \Rightarrow a \not\cap b.$

2. $\left.\begin{array}{l} a \in \hat{a} \\ b \in \hat{a} \\ a \not\cap b \end{array}\right| \Rightarrow$ по определению $a \parallel b$.

Задача 2.

Доказать, что если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, причем эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения параллельна каждой из данных прямых.



Д а н о : $a \parallel b$, $a \in \alpha$, $b \in \beta$,
$\alpha \cap \beta = c$.
Доказать, что $a \parallel c$ и $b \parallel c$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

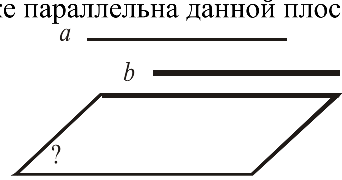
1. $\left.\begin{array}{l} \grave{a} \parallel b \\ b \in \hat{a} \end{array}\right| \Rightarrow$ по признаку $a \parallel \beta$.

2. $\left.\begin{array}{l} \grave{a} \parallel \tilde{\ } \\ \grave{a} \in \acute{a} \\ \acute{a} \cap \hat{a} = \tilde{n} \end{array}\right| \Rightarrow$ по предыдущему утверждению $a \parallel c$.

3. Аналогично, $b \parallel c$.

З а д а ч а 3.

Доказать, что если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.



Д а н о : $a \parallel b$, $a \parallel \alpha$.
Доказать, что $b \parallel \alpha$ либо $b \in \alpha$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

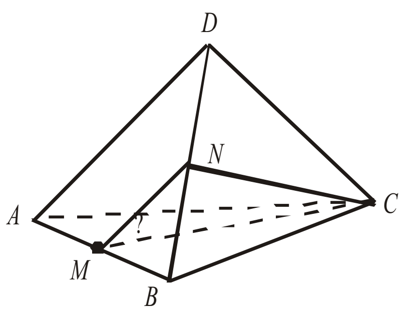
Пусть $b \parallel \alpha$, следовательно $b \cap \alpha$.

Тогда $\left.\begin{array}{l} \grave{a} \parallel b \\ b \cap \acute{a} \end{array}\right| \Rightarrow$ по лемме $a \cap \alpha$.

Полученное противоречие опровергает предположение.

З а д а ч а 4.

Постройте сечение тетраэдра *ABCD* плоскостью, проходящей через вершину *C*, внутреннюю точку *M* ребра *AB* и параллельной прямой *AD*.



П о с т р о е н и е

1. $\left.\begin{array}{l} \tilde{N} \in (\grave{A}\hat{A}\tilde{N}) \\ \grave{I} \in (\grave{A}\hat{A}\tilde{N}) \end{array}\right| \Rightarrow \tilde{N}\grave{I} \in (\grave{A}\hat{A}\tilde{N})$

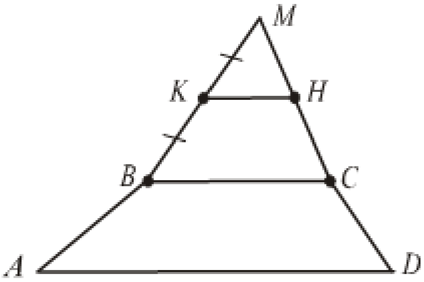
2. $\left.\begin{array}{l} \acute{a} \cap (\grave{A}\hat{A}\tilde{N}) = MN \\ AD \parallel \acute{a} \\ AD \in (ABD) \end{array}\right| \Rightarrow MN \parallel AD$

3. $\left.\begin{array}{l} N \in (BDC) \\ C \in (BDC) \end{array}\right| \Rightarrow NC \in (BDC).$

4. (*MNC*) – искомое сечение.

Найдите площадь полученного сечения, если каждое ребро тетраэдра имеет длину *a* и точка *M* является серединой ребра *AB*.

№ 29.



Д а н о : *ABCD* – трапеция,
BC = 12 см, $M \notin (ABC)$, *BK* = *KM*.
Доказать, что $(ADK) \cap MC = H$.
Найти *KH*.

1. $\left.\begin{array}{l} AD \parallel BC \\ BC \in (BMC) \end{array}\right| \Rightarrow AD \parallel (BMC).$

2. $$\left.\begin{array}{l} AD \parallel (BMC) \\ AD \in (AKD) \\ (BMC) \cap (AKD) = KH \end{array}\right| \Rightarrow AD \parallel KH.$$

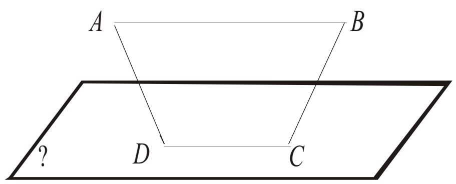
3. $AD \parallel BC$, $AD \parallel KH \Rightarrow KH \parallel BC$.

4. $BK = KH$, $KH \parallel BC \Rightarrow CH = HM$.

Следовательно, KH – средняя линия $\Delta\, BMC$. $KH = 6$ см.

Домашнее задание.

№ 30.



Д а н о : $ABCD$ – трапеция,

$AB \parallel \alpha$, $C \in \alpha$.

Доказать, что:

$CD \in \alpha$; $MN \parallel \alpha$, где MN – средняя линия трапеции.

Д о к а з а т е л ь с т в о

1. Пусть $CD \notin \alpha$, тогда $CD \cap \alpha = c$.

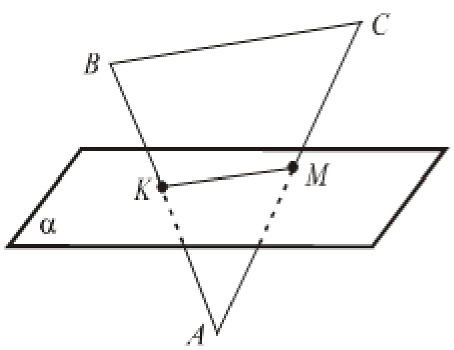
$$\left.\begin{array}{l} CD \cap \alpha \\ AB \parallel CD \end{array}\right| \Rightarrow$$ по лемме $AB \cap \alpha$. Но $AB \parallel \alpha$.

Полученное противоречие опровергает предположение.

Следовательно, $CD \in \alpha$.

2. $$\left.\begin{array}{l} MN \parallel DC \\ DC \in \alpha \end{array}\right| \Rightarrow$$ по признаку $MN \parallel \alpha$.

№ 31.



Д а н о : $\alpha \parallel BC$, $AK = BK$, $K \in \alpha$.

Доказать, что $\alpha \cap AC = M$ и $AM = CM$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

1. $$\left.\begin{array}{l} BC \parallel \alpha \\ (ABC) \cap \alpha = KM \end{array}\right| \Rightarrow KM \parallel BC.$$

2. $$\left.\begin{array}{l} KM \parallel BC \\ AK = BK \end{array}\right| \Rightarrow AM = CM.$$

№ 32 (разобрать доказательство самостоятельно).

У р о к 6
ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ, ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Ц е л и : систематизировать материал изученного параграфа; проверить уровень сформированности умения применять полученные знания к решению задач.

Х о д у р о к а

I. Проверка домашнего задания (у доски).

II. Устная работа.

1. Верна ли формулировка признака параллельности прямой и плоскости: «Прямая, параллельная какой-либо прямой на плоскости, параллельна и самой плоскости». (Нет, прямая может лежать в плоскости).

2. Прямые a и b параллельны. Какое положение может занимать прямая a относительно плоскости, проходящей через прямую b?

3. Даны прямая и две пересекающихся плоскости. Охарактеризовать все возможные случаи их взаимного расположения.

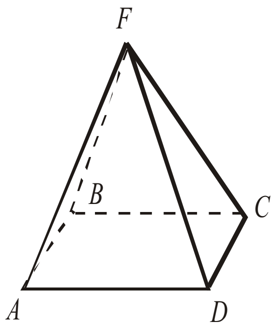
4. Одна из двух параллельных прямых параллельна некоторой плоскости. Можно ли утверждать, что и вторая прямая параллельна этой плоскости? Ответ обоснуйте.

5. Даны две пересекающиеся плоскости. Существует ли плоскость, пересекающая две данные плоскости по параллельным прямым?

6. Даны две скрещивающиеся прямые. Можно ли через одну из этих прямых провести плоскость, параллельную другой?

7. В плоскости α даны две пересекающиеся прямые a и b. Точка C не лежит в плоскости α. Каковы возможные случаи расположения прямой, проходящей через точку C, относительно прямых a и b?

8. Д а н о : $FABCD$ – пирамида, $ABCD$ – параллелограмм.



Каково взаимное расположение прямой пересечения плоскостей (FAD) и (FBC) и плоскости основания (ABC)?

III. Решение задач: №№ 90 (устно), 91, 92, 93, 96.

ДОМАШНЯЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

В а р и а н т I

1. Через сторону AC треугольника ABC проведена плоскость α. $B \in$ α. Докажите, что прямая, проходящая через AB и BC, параллельна плоскости α.

2. Дан Δ MKP. Плоскость, параллельная прямой MK, пересекает MP в точке M_1, PK – в точке K_1. Найдите M_1K_1, если $MP : M_1P = 12 : 5$, $MK = 18$ см.

3. Точка P не лежит в плоскости трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Докажите, что прямая, проходящая через середины PB и PC, параллельна средней линии трапеции.

В а р и а н т II

1. Через основание AD трапеции $ABCD$ проведена плоскость α. $BC \notin$ α. Докажите, что прямая, проходящая через середины сторон AB и CD, параллельна плоскости α.

2. Дан Δ BCE. Плоскость, параллельная прямой CE, пересекает BE в точке E_1, а BC – в точке C_1. Найдите BC_1, если $C_1E_1 : CE = 3 : 8$, $BC =$ = 28 см.

3. Точка E не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямая, проходящая через середины AE и BE, параллельна прямой CD.

У р о к 7

СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

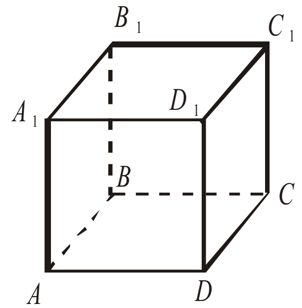
Ц е л ь : доказать признак скрещивающихся прямых, теорему о проведении через одну из скрещивающихся прямых плоскости, параллельной другой прямой.

Х о д у р о к а

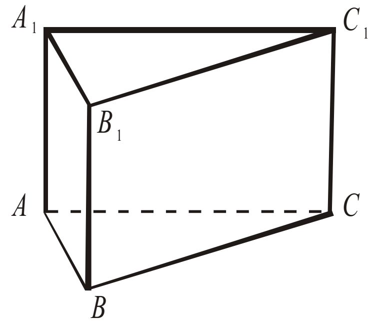
I. Работа над ошибками.

II. Объяснение нового материала. Вспомнить различные случаи взаимного расположения прямых в пространстве (урок № 6).

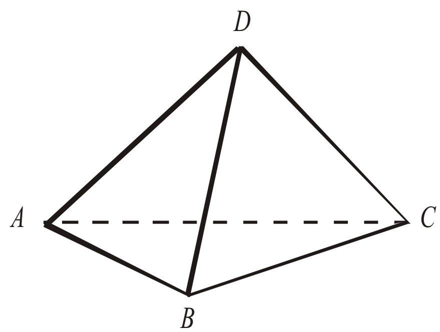
Рассмотреть различные пары скрещивающихся прямых на моделях многоугольников, наблюдая факт, зафиксированный в признаке скрещивающихся прямых.



Например, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. AA_1 и DC – скрещивающиеся ребра. В каких плоскостях лежит прямая CD? Как располагается прямая AA_1 по отношению к этим плоскостям?



$ABCA_1B_1C_1$ – призма. BB_1 и A_1C_1 – скрещивающиеся ребра. В каких плоскостях лежит прямая BB_1? Как располагается прямая A_1C_1 по отношению к этим плоскостям?



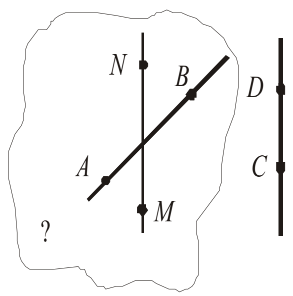
$ABCD$ – пирамида. Рассуждаем аналогично. Наблюдаем: прямые являются скрещивающимися, если одна прямая лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость **в точке, не лежащей на первой прямой.**

Если учащиеся упустили выделенный в формулировке факт, то привести контрпример – пересекающиеся прямые.

Доказать признак скрещивающихся прямых.

Для «открытия» учащимися факта второй теоремы опять обратиться к рассмотрению моделей, каждый раз отвечая на вопросы: назовите плоскость, проходящую через одну из скрещивающихся прямых параллельно другой прямой? Сколько таких плоскостей?

При рассмотрении третьей модели должна возникнуть проблема – можно ли через одну из скрещивающихся прямых построить плоскость, параллельную другой прямой? Учащимся предлагается построить такую плоскость.



Дано: $AB \div CD$.

Построить α : $AB \in \alpha$, $CD \parallel \alpha$.

Анализ

Предположим, что плоскость α построена. Тогда в ней найдется какая-либо прямая MN, параллельная прямой CD. Прямые AB и MN пересекаются и однозначно определяют плоскость α.

Построение

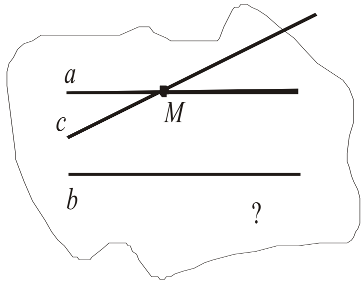
1. Построить $MN \cap AB$, $MN \parallel CD$.
2. $(MN, AB) \equiv \alpha$.
3. α – единственная.

Таким образом, мы доказали теорему, что через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

III. Решение задач.

№ 34 (решать устно, требовать, чтобы учащиеся проговаривали формулировки признаков).

№ 36.



Д а н о : $a \parallel b$, $c \cap a$, $c \not\cap b$.

Доказать, что $b \div c$.

Чтобы утверждать, что b и c – скрещивающиеся прямые, что надо доказать? *(Что одна из них лежит в некоторой плоскости, а другая пересекает эту плоскость.)*

Через какие прямые мы можем провести плоскость? *(Через пересекающиеся, через параллельные.)*

Если мы проведем плоскость α через пересекающиеся прямые a и c, то прямая b, будет параллельна плоскости α. То есть нужно провести плоскость α через параллельные прямые a и b.

1. $(a, b) \equiv \alpha$.

2. $\left.\begin{array}{l} c \cap a \\ \grave{a} \in \acute{a} \end{array}\right| \Rightarrow \tilde{n} \cap \acute{a}.$

3. $\left.\begin{array}{l} b \in \acute{a} \\ c \cap \acute{a} = M \\ M \in b \end{array}\right| \Rightarrow b \div c$ (по признаку).

Домашнее задание: теория (п. 7), № 35 (воспользуйтесь методом от противного), № 37.

У р о к 8

СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

Ц е л ь : закрепить навык использования признака скрещивающихся прямых при решении задач.

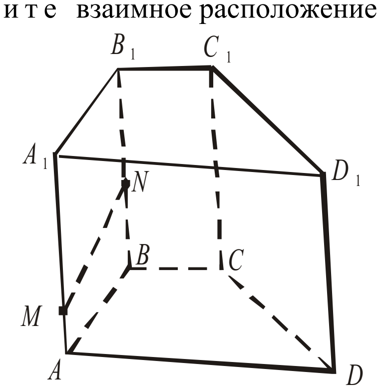
Х о д у р о к а

I. Опрос у доски (знание теорем, их доказательств).

II. Проверка домашнего задания.

III. Устная работа.

1. Какие прямые называются скрещивающимися?
2. С ф о р м у л и р у й т е признак скрещивающихся прямых.
3. В ы я с н и т е взаимное расположение прямых:



AD и B_1C_1;
BC и CC_1;
CC_1 и AB;
CC_1 и AA_1;
A_1B_1 и CD;
MN и AB;
MN и A_1B_1;
MN и AD;
MN и B_1C_1.

4. Верно ли утверждение: если две прямые не имеют общих точек, то они параллельны?
5. Две прямые параллельны некоторой плоскости. Могут ли эти прямые: а) пересекаться? б) быть скрещивающимися?
6. Могут ли скрещивающиеся прямые a и b быть параллельными прямой c? Ответ обоснуйте.
7. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Точки A и A_1 лежат на прямой a, точки B и B_1 – на прямой b. Как будут расположены прямые AB и A_1B_1?
8. Прямая a скрещивается с прямой b, а прямая b скрещивается с прямой c. Следует ли из этого, что прямые a и c скрещиваются?
9. Каково должно быть взаимное расположение трех прямых, чтобы можно было провести плоскость, содержащую все прямые?
10. Можно ли провести прямую, пересекающую каждую из трех скрещивающихся прямых?

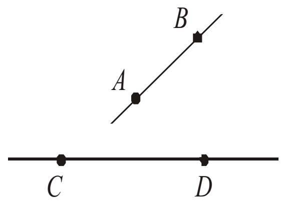
11. Даны две пересекающиеся плоскости α и β. В плоскости α лежит прямая *a*, а в плоскости β – прямая *b*. Лежат ли прямые *a* и *b* в одной плоскости, если известно, что они пересекают линию пересечения плоскостей α и β: а) в одной точке; б) в разных точках?

12. Даны две параллельные плоскости α и β. В плоскости α лежит прямая *a*, а в плоскости β – прямая *b*. Каковы возможные случаи взаимного расположения прямых *a* и *b*?

13. В плоскости двух параллельных (пересекающихся) прямых *a* и *b* дана точка *C*, не лежащая на этих прямых. Прямая *c* проходит через точку *C*. Как может быть расположена прямая *c* относительно прямых *a* и *b*?

IV. Решение задач.

№ 39.



Д а н о : $AB \div CD$.

Доказать, что $AD \div BC$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

1. $(A, C, D) = \alpha$.

2. $$\left.\begin{array}{l} \grave{A} \in \acute{a} \\ \hat{A} \notin \acute{a} \end{array}\right| \Rightarrow \grave{A}\hat{A} \cap \acute{a} = \grave{A}.$$

3. $$\left.\begin{array}{l} CD \in \acute{a} \\ AB \cap \acute{a} = A \\ A \notin CD \end{array}\right| \Rightarrow AD \div BC$$ (по признаку).

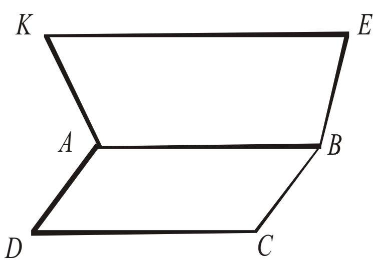
№ 41.

Д а н о : $a \div b$.

Может ли $a \parallel c$ и $b \parallel c$.

Пусть $a \parallel c$ и $b \parallel c$, тогда $a \parallel b$. Противоречие условию.

№ 42.



Д а н о : *ABCD* – параллелограмм, *ABEK* – трапеция, $EK \notin (ABC)$.

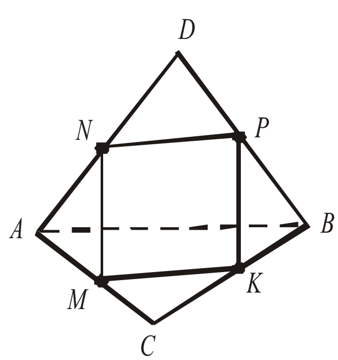
а) Выясните взаимное расположение прямых *CD* и *EK*.

б) Найдите P_{ABEK}, если $AB = 22{,}5$ см, $EK = 27{,}5$ см, в трапецию можно вписать окружность.

1. $$\left.\begin{array}{l} \tilde{N}D \parallel AB \\ AB \parallel EK \end{array}\right| \Rightarrow CD \parallel EK.$$

2. Так как в трапецию можно вписать окружность, то $AB + EK = AK + BE$. $P_{ABEK} = 2 \cdot (22{,}5 + 27{,}5) = 2 \cdot 50 = 100$ см.

№ 43.



Д а н о : *ABCD* – пространственный четырехугольник. *M*, *N*, *P*, *K* – середины *AC*, *AD*, *BD*, *BC* соответственно.

Доказать, что *MNPK* – параллелограмм.

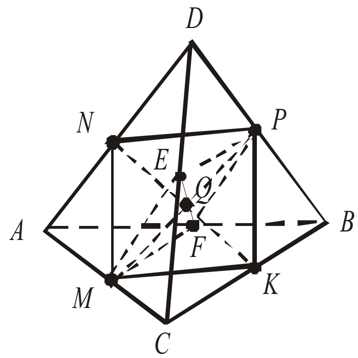
1. *MK* – средняя линия Δ *ABC* ⇒

$\Rightarrow MK \parallel AB$, $MK = \dfrac{1}{2} AB$.

2. NP – средняя линия $\Delta ADB \Rightarrow NP \parallel AB$, $NP = \frac{1}{2}AB$.

3. $\left.\begin{matrix} MK \parallel NP \\ MK = NP \end{matrix}\right| \Rightarrow MNPK$ – параллелограмм.

№ 101.



Д а н о : $ABCD$ – тетраэдр.
$AM = MC$, $AF = FB$, $AN = ND$,
$BP = PD$, $CK = KB$, $DE = EC$.
Доказать, что $MP \cap NK \cap EF = Q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

1. $MNPK$ – параллелограмм (см. № 43) $\Rightarrow$ $\Rightarrow MP \cap NK = Q$, $MQ = QP$.

2. $MNPK$ – параллелограмм (аналогично) $\Rightarrow MP \cap EF = Q_1$, $MQ_1 = Q_1P$.

3. $\left.\begin{matrix} MQ = QP \\ MQ_1 = Q_1P \end{matrix}\right| \Rightarrow Q = Q_1$.

4. $MP \cap NK \cap EF = Q$.

Домашнее задание: теория (п. 7), №№ 38, 93, 94, 100.

У р о к 9
УГЛЫ С СОНАПРАВЛЕННЫМИ СТОРОНАМИ.
УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

Ц е л ь : доказать теорему об углах с сонаправленными сторонами.

Х о д у р о к а

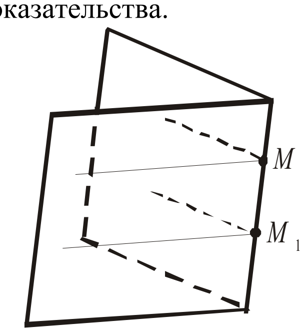
I. Повторение пройденного.

П р о д о л ж и т е предложение.

1. Если две прямые в пространстве не имеют общих точек, то они…
2. Если две прямые не принадлежат одной плоскости, то они…
3. Если $ABCD$ – пирамида, то прямые AB и CD…
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Прямые AB и CC_1…
5. Геометрическое место прямых, пересекающих одну из скрещивающихся прямых и параллельных другой, есть…

II. Объяснение нового материала.

Пункты учебника (п. 8, 9) можно прочитать вместе с учащимися. Проверить осознанность усвоения теоремы об углах с сонoправленными сторонами, можно, попросив учащихся доказать теорему на видоизмененном чертеже, составить план доказательства.



III. Решение задач №№ 44, 45, 47.

Домашнее задание: теория (п. 8 – 9); №№ 46, 97.

Уроки 10–11
АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ.
ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Цель: повторить теорию, подготовить учащихся к контрольной работе.

Ход уроков

I. Устная работа.

1. Прямая пересекает две стороны треугольника. Лежит ли она в плоскости этого треугольника?

2. Прямая пересекает вершину треугольника. Лежит ли она в плоскости этого треугольника?

3. Три вершины параллелограмма лежат в плоскости. Принадлежит ли четвертая вершина параллелограмма этой плоскости?

4. Хорда окружности принадлежит плоскости. Верно ли утверждение, что и вся окружность лежит в этой плоскости?

5. Две пересекающиеся хорды окружности принадлежат плоскости. Верно ли утверждение, что любая точка окружности принадлежит этой плоскости?

6. Сколько плоскостей можно провести через: три различные точки; две различные точки; через прямую и не лежащую на ней точку; через две параллельные прямые?

7. Верно ли утверждение: любые три точки принадлежат плоскости; через любые три точки проходит единственная плоскость?

8. Известно, что прямая параллельна плоскости. Параллельна ли она любой прямой, лежащей в этой плоскости? Может ли данная прямая пересечь какую-либо прямую, лежащую в плоскости?

9. Средняя линия трапеции лежит в плоскости α. Пересекают ли основания трапеции эту плоскость?

10. Прямая a параллельна линии пересечения плоскостей α и β. Каково взаимное расположение a и α; a и β?

11. Прямая b непараллельна линии пересечения плоскостей α и β. Каково взаимное расположение b и α; b и β?

12. Сколько можно провести через данную точку: прямых, параллельных данной плоскости; плоскостей, параллельных данной прямой?

13. Стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ пересекают некоторую плоскость. Докажите, что прямые AD и DC пересекают эту плоскость.

14. Плоскость α параллельна одной из двух параллельных прямых. Каково взаимное расположение второй прямой и плоскости α?

15. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ лежит в плоскости α. Докажите, что сторона CD параллельна этой плоскости.

16. Прямая пересекает плоскость. Можно ли в плоскости провести прямую, параллельную данной прямой?

17. Две прямые параллельны одной плоскости. Можно ли утверждать, что эти прямые параллельны?

18. Каким может быть взаимное расположение двух прямых, из которых одна параллельна некоторой плоскости, а другая пересекает эту плоскость?

19. Прямые a и b скрещиваются с прямой c. Могут ли прямые a и b быть параллельными? Пересекаться?

20. Может ли каждая из двух скрещивающихся прямых быть параллельна третьей прямой?

21. Прямая, не лежащая в плоскости параллелограмма, параллельна одной из его диагоналей. Каково взаимное расположение данной прямой и второй диагонали?

22. Как могут быть расположены прямая и плоскость, если данная прямая и некоторая прямая, лежащая в этой плоскости, скрещиваются?

II. Решение задач.

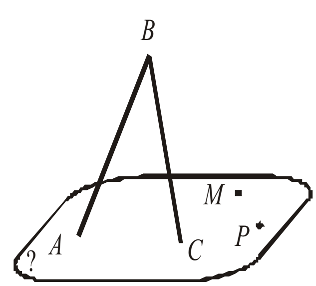
Варианты I и IV рассмотреть в классе. Варианты II и III дать домой для самостоятельного решения.

Вариант I

1. На рисунке точки A, C, M и P лежат в плоскости α, а точка $B \notin$ α.

Постройте точку пересечения прямой MP с плоскостью ABC.

Поясните.



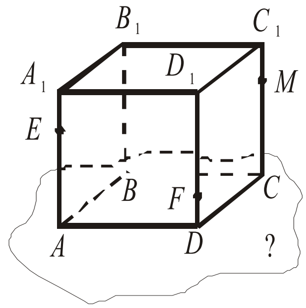
2. Треугольники ABC и ADC лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону AC. Точка E лежит на стороне AB, F – на стороне BC, причем EF параллельна плоскости ADC. P – середина AD, а K – середина DC.

1) Докажите, что $EF \parallel PK$.

2) Каково взаимное положение прямых PK и AB? Чему равен угол между этими прямыми, если $\angle ABC = 40°$ и $\angle BCA = 80°$?

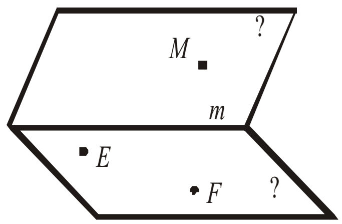
3. Плоскости α и β пересекаются по прямой m. Прямая a лежит в плоскости α. Каково возможное взаимное положение прямой a и плоскости β ? Сделайте рисунок и поясните.

4*. Используя рисунок, постройте линию пересечения плоскости EFM с плоскостью α. Поясните.



Вариант IV

1. На рисунке точки E и F лежат в плоскости β, а M – в плоскости α. Постройте линии пересечения плоскости EFM с плоскостями α и β. Поясните.



2. Основание AD трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α. Через точки B и C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках E и F соответственно.

1) Докажите, что $BCFE$ – параллелограмм.

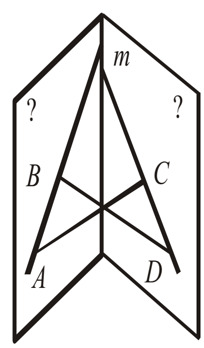
2) Каково взаимное положение прямых EF и AB? Чему равен угол между ними, если $\angle ABC = 150°$? Поясните.

3. Отрезок AB параллелен плоскости α, а отрезок CD лежит в этой плоскости, причем $AB = CD$. Можно ли утверждать, что четырехугольник $ABDC$ – параллелограмм? Поясните.

4*. Плоскости α и β пересекаются по прямой m. Прямая AB лежит в плоскости α, а CD – в плоскости β.

Что нужно изменить в условии, чтобы прямые AC и BD могли пересекаться?

В каком случае это возможно?

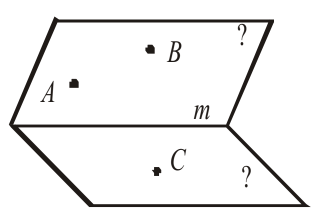


Вариант II

1. На рисунке точки A и B лежат в плоскости α, а C – в плоскости β.

Постройте линии пересечения плоскости ABC с плоскостями α и β.

Поясните.



2. Треугольники ABC и DCE лежат в разных плоскостях и имеют общую вершину C, $AB \parallel DE$.

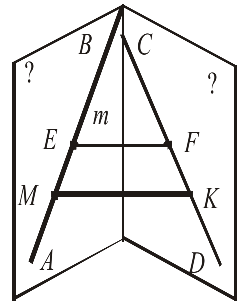
1) Постройте линию пересечения плоскостей ABC и DCE. Поясните.

2) Каково взаимное положение прямых AB и DF, где F лежит на стороне CE? Чему равен угол между этими прямыми, если $\angle FED = 60°$ и $\angle DFE = 100°$? Поясните.

3. Прямая a параллельна плоскости α, точка M и прямая c лежат в плоскости α ($M \notin c$). Через точку M проведена прямая b, параллельная a. Каково взаимное положение прямых b и c? Поясните.

4*. Плоскости α и β пересекаются по прямой m. Прямая AB лежит в плоскости α, а CD – в плоскости β.

Что нужно изменить в условии, чтобы прямые EF и MK могли быть параллельными? Поясните.

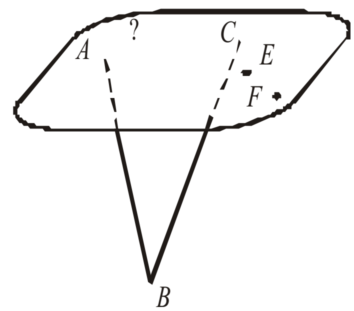


Вариант III

1. На рисунке точки A, C, E и F лежат в плоскости α, а точка $B \notin$ α.

Постройте точку пересечения прямой EF с плоскостью ABC.

Поясните.



2. Трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания) и треугольник AED имеют общую сторону AD и лежат в разных плоскостях. Точка M лежит на стороне AE, а P – на стороне DE, причем MP параллельна плоскости трапеции.

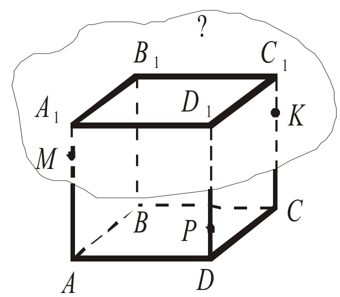
1) Докажите, что $MP \parallel BC$.

2) Каково взаимное положение прямых MP и AB? Чему равен угол между этими прямыми, если $\angle ABC = 110°$? Поясните.

3. Плоскости α и β пересекаются по прямой m. Прямая a лежит в плоскости α, а b – в плоскости β. Какие возможны взаимные положения прямых a и b? Сделайте рисунок и поясните.

4*. Используя рисунок, постройте линию пересечения плоскости MPK с плоскостью α.

Поясните.



Урок 12

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Ход урока

Вариант I

1. В каком случае три точки в пространстве не определяют положение плоскости, проходящей через эти точки?

2. Могут ли две различные плоскости иметь только одну общую точку?

3. Точка M не лежит на прямой a. Через точку M проводятся прямые, пересекающие прямую a. Лежат ли эти прямые в одной плоскости?

4. Каково взаимное положение прямых: 1) AD_1 и MN; 2) AD_1 и BC_1; 3) MN и DC? *(Рис. 1.)*

5. Прямые a и b скрещиваются с прямой c. Могут ли прямые a и b пересекаться?

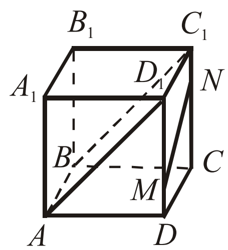


Рис. 1

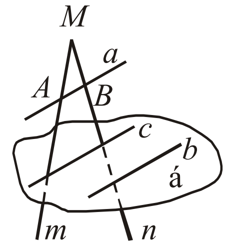


Рис. 2

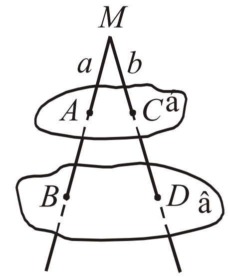


Рис. 3

6. Прямая a параллельна плоскости α. Существуют ли на плоскости α прямые, не параллельные a? Если да, то каково их взаимное положение?

7. На рисунке 2 прямые m и n пересекаются в точке M, $A \in m$; $B \in n$; b лежит в плоскости α, $a \parallel b$. Каково взаимное положение прямых b и c?

8. Даны треугольник ABC и плоскость α, $AB \parallel \alpha$; $AC \parallel \alpha$. Каково взаимное положение прямой BC и плоскости α?

9. На рисунке 3 плоскости α и β параллельны. Пересекающиеся в точке M прямые a и b пересекают плоскость α в точках A и C, а плоскость β – в точках B и D, $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$. Найдите отношение $\frac{MC}{MD}$.

10. Плоскость α пересекает только боковые ребра параллелепипеда. Определите вид сечения.

Вариант II

1. Что можно сказать о взаимном положении двух плоскостей, имеющих три общие точки, не лежащие на одной прямой?

2. Могут ли две различные плоскости иметь только две общие точки?

3. Прямые a и b пересекаются в точке M. Прямая c, не проходящая через точку M, пересекает прямые a и b. Лежат ли все эти три прямые в одной плоскости?

4. Каково взаимное положение прямых: 1) A_1D и MN; 2) A_1D и B_1C; 3) MN и A_1B_1? *(Рис. 1.)*

5. Прямые a и b скрещиваются с прямой c. Могут ли прямые a и b быть параллельными?

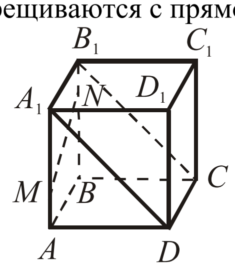


Рис. 1

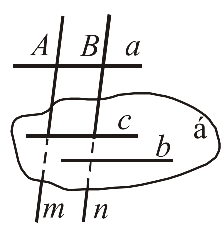


Рис. 2

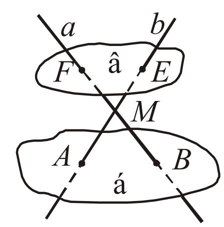


Рис. 3

6. Две прямые параллельны одной и той же плоскости. Можно ли утверждать, что эти прямые параллельны между собой? Если нет, то каково их взаимное положение?

7. На рисунке 2 прямые m и n параллельны. Точки A и B соответственно принадлежат прямым m и n; b лежит в плоскости α, $a \parallel b$. Каково взаимное положение прямых b и c?

8. Даны четырехугольник $ABCD$ и плоскость α. Его диагонали AC и BD параллельны плоскости α. Каково взаимное положение AB и плоскости α?

9. На рисунке 3 плоскости α и β параллельны. Пересекающиеся в точке M прямые a и b пересекают плоскость α соответственно в точках B и A, а плоскость β – в точках E и F. $\frac{ÅÌ}{Ì\ F} = \frac{2}{5}$. Найдите отношение $\frac{MB}{MA}$.

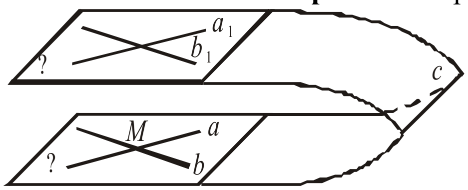
10. Плоскость α проходит через диагональ основания параллелепипеда и середину одной из сторон верхнего основания. Определите вид сечения.

Урок 13
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ. ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

Цели: ввести понятие параллельных плоскостей; доказать признак параллельности двух плоскостей.

Х о д   у р о к а

I. Объяснение нового материала построить в соответствии с пунктом 11 учебника.



Д а н о : $a \cap b = M$, $a \in \alpha$, $b \in \alpha$,
$a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$, $a_1 \in \beta$, $b_1 \in \beta$.
Доказать, что $\alpha \parallel \beta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

1. $\left.\begin{matrix} a \parallel a_1 \\ a_1 \in \hat{a} \end{matrix}\right| \Rightarrow a \parallel \hat{a}.$

2. $\left.\begin{matrix} b \parallel b_1 \\ b_1 \in \hat{a} \end{matrix}\right| \Rightarrow b \parallel \hat{a}.$

3. Пусть α β, тогда $\alpha \cap \beta = c$.

4. $\left.\begin{matrix} a \in \acute{a} \\ a \parallel \hat{a} \\ \acute{a} \cap \hat{a} = c \end{matrix}\right| \Rightarrow a \parallel c.$

5. $\left.\begin{matrix} b \in \acute{a} \\ b \parallel \hat{a} \\ \acute{a} \cap \hat{a} = c \end{matrix}\right| \Rightarrow b \parallel c.$

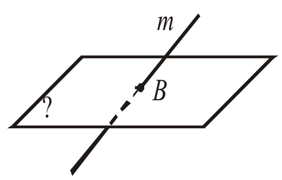
6. $a \parallel c$, $b \parallel c$, но $a \cap b = M$ по условию.

Полученное противоречие доказывает, что наше предположение неверно. Следовательно, $\alpha \parallel \beta$.

II. Решение задач.

№ 48 (устно).

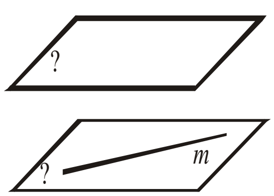
№ 49.



Д а н о : $m \cap \alpha = B$.
Существует ли β: $m \in \beta$, $\alpha \parallel \beta$?
1. $m \cap \alpha = B \Rightarrow B \in \alpha$.
2. $m \in \beta \Rightarrow B \in \beta$.

3. $\left.\begin{matrix} B \in \acute{a} \\ B \in \hat{a} \end{matrix}\right| \Rightarrow \acute{a} \cap \hat{a} = c,\ B \in c.$

№ 50.



Д а н о : $\alpha \parallel \beta$, $m \in \alpha$.
Доказать, что $m \parallel \beta$.

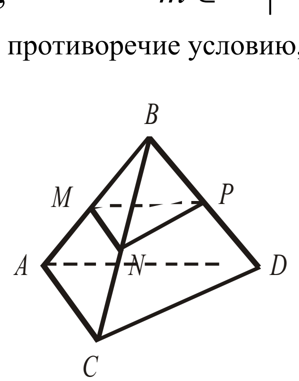
Д о к а з а т е л ь с т в о

1. Пусть $m \parallel \beta$, $m \cap \beta = K$.

2. $\left.\begin{matrix} K \in \hat{a} \\ K \in \acute{a}, \end{matrix}\ \text{òàê êàê}\ m \in \acute{a}\right| \Rightarrow \acute{a} \cap \hat{a}.$

Получили противоречие условию, которое опровергает наше предположение. Следовательно, $m \parallel \beta$.

№ 54.



Д а н о : $B \notin (ADC)$, $AM = MB$,
$CN = NB$, $BP = PD$.
Доказать, что $(MNP) \parallel (ABC)$.
Найти S_{MNP}, если $S_{ADC} = 48$ см^2.

Р е ш е н и е

1. MN – средняя линия $\Delta\, ABC \Rightarrow MN \parallel AC$.

2. NP – средняя линия $\Delta\ CBD \Rightarrow NP \parallel CD$.

3. $$\left.\begin{array}{l} MN \parallel AC \\ NP \parallel CD \\ MN \cap NP \\ AC \cap CD \end{array}\right| \Rightarrow (MNP) \parallel (ABC)$$ по признаку.

4. $\Delta\ MNP\ \Delta\ ADC$, $K = \dfrac{1}{2} \Rightarrow S_{MNP} = \dfrac{1}{4} \cdot 48 = 12$ (см^2).

Домашнее задание: теория (п. 10), №№ 51, 52, 53.

Урок 14

СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Цели: доказать теорему существования и единственности плоскости, параллельной данной и проходящей через данную точку пространства; рассмотреть свойства параллельных плоскостей.

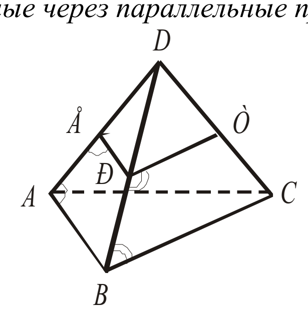
Ход урока

I. Проверка домашнего задания (у доски).

II. Устная работа.

1. Верно ли, что если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны другой плоскости, то эти плоскости параллельны. *(Верно.)*

2. Верно ли, что если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны. *(Нет. Привести контрпример – пересекающиеся плоскости, проведенные через параллельные прямые.)*



3. Дано: $\angle DAB + \angle AEP = 180°$, $\angle DBC + \angle TPB = 180°$.
Доказать, что $(ABC) \parallel (EPT)$.

4. Каким может быть взаимное расположение прямой a и плоскости β, если прямая a лежит в плоскости α, параллельной плоскости β?

5. Как могут быть расположены плоскости α и β, если плоскость α проходит через некоторую прямую a, параллельную плоскости β?

6. Как могут быть расположены плоскости α и β, если любая прямая, лежащая в плоскости α, параллельна плоскости β?

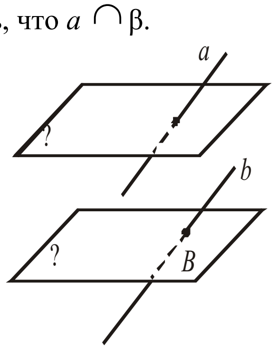
III. Объяснение нового материала построить как процесс решения задач в соответствии с пунктом 11 учебника.

IV. Решение задач: №№ 55, 56, 58, 59, 60.

№ 55.

Дано: $a \cap \alpha$, $\beta \parallel \alpha$.

Доказать, что $a \cap \beta$.

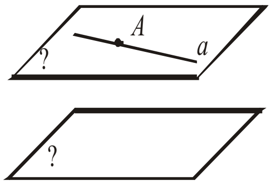


Доказательство

1. Проведем b: $B \in b$, $B \in \beta$, $b \parallel a$.

2. $$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ b \cap \beta = B \end{array}\right| \Rightarrow a \cap \beta$$ по лемме.

№ 56.



Д а н о : α || β, $A \in$ α, $A \in a$, a || β.

Доказать, что $a \in$ α.

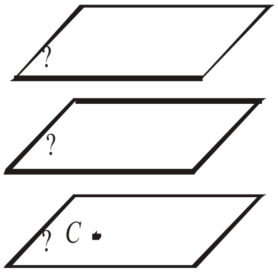
Д о к а з а т е л ь с т в о

1. Пусть $a \notin$ α, тогда $a \cap$ α = A.

2. $$\left.\begin{array}{l} a \cap \text{á} \\ \text{á} \parallel \text{â} \end{array}\right| \Rightarrow a \cap \text{â}$$ (задача № 55).

Получили противоречие условию. Следовательно, наше предположение неверно и $a \in$ α.

№ 60.



Д а н о : α || χ, β || χ.

Доказать, что α || β.

Д о к а з а т е л ь с т в о

1. Проведем в плоскости α пересекающиеся прямые a и b.

2. Отметим $C \in$ χ.

Проведем (a, C) = Q_1, $Q_1 \cap$ χ = a_1. (b, C) = Q_2, $Q_2 \cap$ χ = b_1.

Причем $a \parallel a_1$ и $b \parallel b_1$, $a_1 \cap b_1 = c$.

3. Аналогично проведем рассуждения для плоскостей β и χ. Получим в плоскости β прямые a_2 и b_2. Причем $a_1 \parallel a_2$, $b_1 \parallel b_2$.

4. $$\left.\begin{array}{l} a \parallel a_2 \\ b \parallel b_2 \\ a \cap b \\ a \in \alpha \\ b \in \alpha \\ a_2 \in \beta \\ b_2 \in \beta \end{array}\right| \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$ по признаку.

Домашнее задание: теория (п. 11), №№ 57, 61, 104.

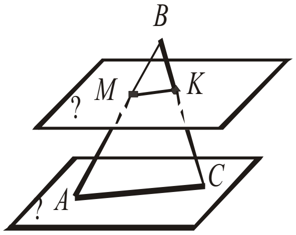
У р о к 15
ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ. СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Ц е л ь : сформировать навык применения изученных свойств параллельных плоскостей при решении задач.

Х о д у р о к а

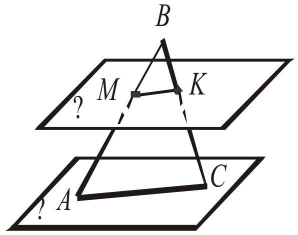
I. Проверка домашнего задания (у доски).

II. Устная работа.



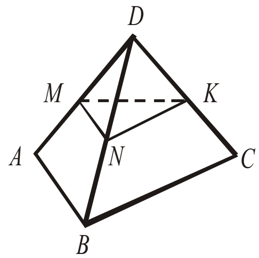
1. Д а н о : Δ ABC, $AC \in$ α, $AM = MB$, $M \in$ β, β || α, β $\cap$ $BC = K$.

Доказать, что MK – средняя линия Δ ABC.

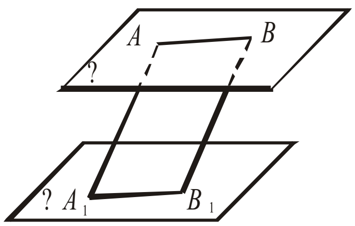


2. Одна из сторон треугольника принадлежит плоскости α. Плоскость β параллельна плоскости α и пересекает две другие стороны треугольника.

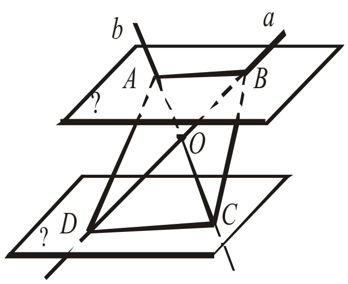
Доказать, что β отсекает от треугольника треугольник, подобный данному.



3. Д а н о : (MNK) || (ABC).
Доказать, что $\angle MNK = \angle ABC$.



4. Д а н о : α || β, AA_1 || BB_1, AB = 10 см.
Найти A_1B_1.



5. Д а н о : α || β, $a \cap b = O$, $AO = OC, DO = OB$.
Определить вид четырехугольника $ABCD$.

III. Решение задач. №№ 63, 64, 65 (устно), 107.

ДОМАШНЯЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

В а р и а н т I

1. Параллелограммы $ABCD$ и $ADFE$ лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону AD. Прямая m, параллельная BC, пересекает плоскости ABE и DCF соответственно в точках H и P. Докажите, что $HPFE$ – параллелограмм.

2. На рисунке 1 плоскости α и β параллельны, a || a_1. Прямая a пересекает плоскости α и β соответственно в точках A и B, а прямая a_1 пересекает плоскость α в точке A_1. Постройте точку пересечения a_1 с плоскостью β. Поясните.

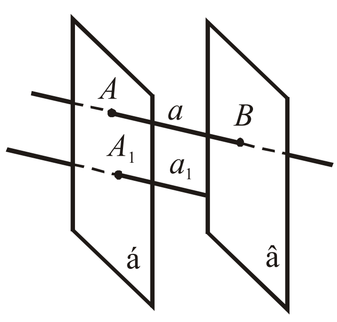


Рис. 1

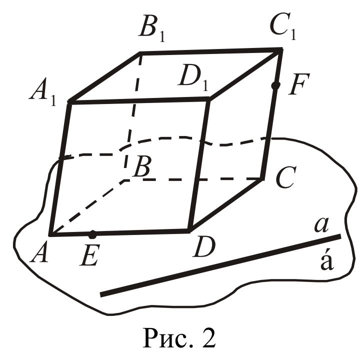


Рис. 2

3. В тетраэдре $DABC$ $\angle DBA = \angle DBC = 90°$, $DB = 6$, $AB = BC = 8$, $AC = 12$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через середину DB и параллельной плоскости ADC. Найдите площадь сечения.

4*. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки E и F и параллельной прямой a (рис. 2).

В а р и а н т II

1. Вне плоскости α расположен треугольник ABC, у которого медианы AA_1 и BB_1 параллельны плоскости α. Через вершины B и C треугольника проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α соответственно в точках E и F. Докажите, что $ECBF$ – параллелограмм.

2. На рисунке 1 плоскости α и β параллельны. Прямая a пересекает плоскости α и β соответственно в точках A и B, а прямая b – в точках C и D. Найдите взаимное положение прямых a и b. Поясните.

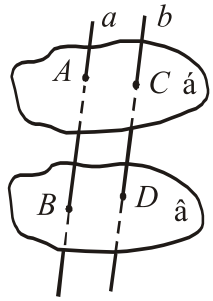


Рис. 1

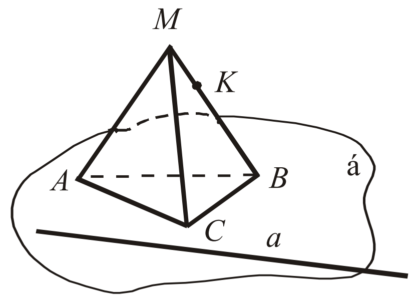


Рис. 2

3. Все грани параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – квадраты со стороной a. Через середину AD параллельно плоскости DA_1B_1 проведена плоскость. Найдите периметр сечения.

4*. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки C и K и параллельной прямой a (рис. 2).

Вариант III

1. Прямоугольники $ABCD$ и $EBCF$ лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону BC. Прямая a параллельна AD и пересекает плоскости ABE и DCF соответственно в точках P и H. Докажите, что $PBCH$ – параллелограмм.

2. На рисунке 1 плоскости α и β параллельны. Прямые a и b пересекаются в точке M. Прямая a пересекает плоскости α и β соответственно в точках A и B, а прямая b пересекает плоскость β в точке D. Постройте точку пересечения прямой b с плоскостью α.

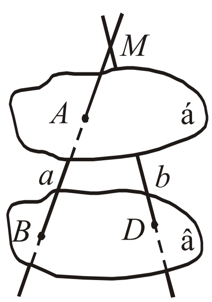


Рис. 1

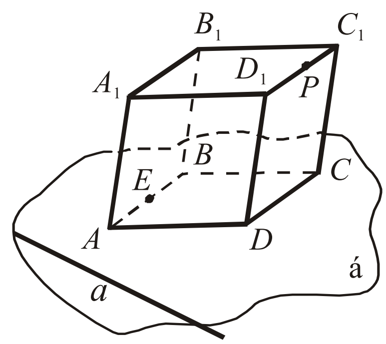


Рис. 2

3. В тетраэдре $DABC$ точка M – середина AC, $DB = 6$, $MD = 10$, $\angle DBM = 90°$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через середину ребра DC и параллельной плоскости DMB, и найдите площадь сечения.

4*. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки E и P и параллельной прямой a (рис. 2).

Вариант IV

1. Трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания) расположена вне плоскости α. Диагонали трапеции параллельны плоскости α. Через вершины A и B проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α в точках E и F соответственно. Докажите, что $EABF$ – параллелограмм.

2. На рисунке 1 плоскости α и β параллельны. Прямая a пересекает плоскости α и β соответственно в точках A и B, а прямая b – в точках C и D. Каково взаимное положение прямых a и b? Поясните.

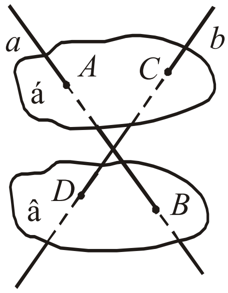


Рис. 1

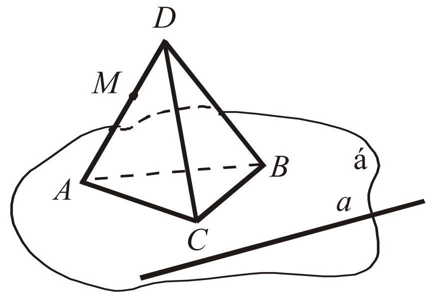


Рис. 2

3. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, все грани которого – прямоугольники, $AD = 4$, $DC = 8$, $CC_1 = 6$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через середину ребра DC и параллельной плоскости AB_1C_1, и найдите периметр сечения.

4*. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки C и M и параллельной прямой a (рис. 2).

Урок 16
ТЕТРАЭДР

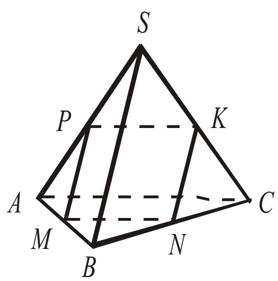
Цель: ввести понятие тетраэдра, проиллюстрировать изученные понятия, связанные со взаимным расположением прямых и плоскостей на примере треугольной пирамиды.

Ход урока

I. Объяснение нового материала построить в соответствии с пунктом 12.

II. Решение задач: №№ 66, 67, 68 (на готовом чертеже), 69, 70, 74.

№ 69.



Дано: $SABC$ – тетраэдр.
$MA = MB$, $BN = NC$, $M \in \alpha$, $N \in \alpha$, $BS \parallel \alpha$, $\alpha \cap (ABS) = PM$, $\alpha \cap (BCS) = KN$.
Доказать, что $PM \parallel KN$.

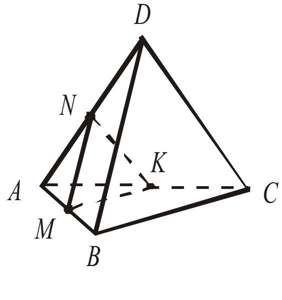
Доказательство

1. $$\left.\begin{array}{l} BS \in (BCS) \\ BS \parallel \alpha \\ (BCS) \cap \alpha = KN \end{array}\right| \Rightarrow BS \parallel KN.$$

2. $$\left.\begin{array}{l} BS \in (ABS) \\ BS \parallel \alpha \\ (ABS) \cap \alpha = PM \end{array}\right| \Rightarrow BS \parallel PM.$$

3. $$\left.\begin{array}{l} BS \parallel KN \\ BS \parallel PM \end{array}\right| \Rightarrow KN \parallel PM.$$

№ 70.

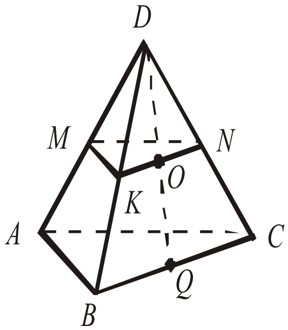


Дано: $ABCD$ – тетраэдр,
$AM = MB$, $AN = ND$, $AK = KC$.
Доказать, что $(MNK) \parallel (BCD)$.

Доказательство

1. $MK \parallel BC$ (по свойству средней линии).
2. $MN \parallel BD$ (по свойству средней линии).
3. $$\left.\begin{array}{l} MK \parallel BC \\ MN \parallel BD \\ MK \cap MN \\ BC \cap BD \end{array}\right| \Rightarrow (MNK) \parallel (BCD).$$.

№ 74.



Дано: $ABCD$ – тетраэдр, O – точка пересечения медиан Δ BCD, $O \in \alpha$, $\alpha \parallel (ABC)$, $\alpha \cap AD = M$, $\alpha \cap BD = K$, $\alpha \cap DC = N$.

Доказать, что Δ MNK Δ ABC.

Найдите $\frac{S_{MNK}}{S_{ABC}}$.

Решение

1. $$\left.\begin{array}{l} \text{á} \parallel (ABC) \\ \text{á} \cap (BCD) = KN \\ (ABC) \cap (BCD) = BC \end{array}\right| \Rightarrow KN \parallel BC.$$
2. Аналогично $MK \parallel AB$, $MN \parallel AC$.
3. Δ BCD Δ KND (по двум углам) $\Rightarrow$ $KN = \frac{2}{3}BC$, $DK = \frac{2}{3}BD$, $DN = \frac{2}{3}DC$.
4. $$\left.\begin{array}{l} DK = \frac{2}{3}DB \\ MK \parallel AB \end{array}\right| \Rightarrow DM = \frac{2}{3}AD.$$
5. Δ MDK Δ ADB (по двум углам) $\Rightarrow$ $MK = \frac{2}{3}AB$.
6. Аналогично, $MN = \frac{2}{3}AC$.
7. Δ MNK Δ ABC (по трем сторонам).
8. $\frac{S_{MNK}}{S_{ABC}} = \frac{4}{9}$.

Домашнее задание: теория (п. 12), №№ 71, 102, 103.

Урок 17
ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Цель: ввести понятие параллелепипеда, рассмотреть свойства ребер, граней, диагоналей параллелепипеда.

Х о д у р о к а

I. Объяснение нового материала построить в соответствии с пунктом 13 учебника.

II. Решение задач: №№ 76 (устно), 77, 78 (устно по готовому чертежу), 79, 80.

III. Домашнее задание: теория (п. 13), №№ 81, 109, 110. Подготовить ответы на вопросы к главе I.

У р о к 18

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ

Ц е л ь : сформировать навык решения простейших задач на построение сечений тетраэдра и параллелепипеда.

Х о д у р о к а

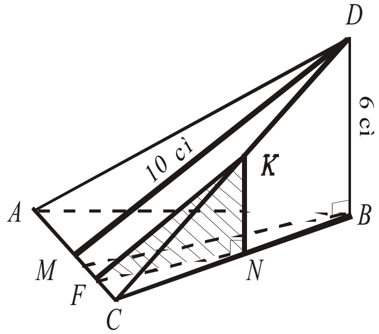
I. Устная работа – вопросы к главе I.

II. Решение задач: №№ 72, 73, 75, 82.

III. Домашнее задание: теория (п. 14), №№ 83, 84, 85, 86.

Д о п о л н и т е л ь н о :

1. $ABCD$ – тетраэдр, M – середина AC, $DB = 6$, $MD = 10$, $\angle DBM = 90°$.



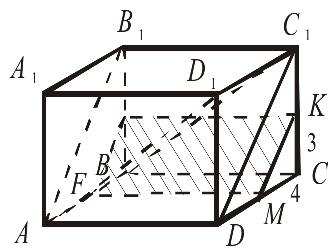
Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через середину DC параллельно плоскости (DMB), и найдите $S_{сеч}$.

1) $MB = 8$ см.

2) $\Delta\ DBM\ \Delta\ KNF$, $K = \frac{1}{2}$.

$S_{DBM} = 24$ см^2 $\Rightarrow$ $S_{KNF} = 6$ см^2.

2. Все грани параллелепипеда – прямоугольники.



$AD = 4$, $DC = 8$, $CC_1 = 6$, M – середина DC.

Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через M и параллельной (AB_1C_1).

Найти $P_{сеч}$.

У р о к 19

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

ДОМАШНЯЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

1. Через точку K, не лежащую между параллельными плоскостями α и β, проведены прямые a и b. Прямая a пересекает плоскости α и β в точках A_1 и A_2 соответственно, b – в точках B_1 и B_2.

Найти B_1B_2, если $A_2B_2 : A_1B_1 = 9 : 4$, $KB_1 = 8$ см.

2. Параллелограммы $ABCD$ и $ADFE$ лежат в разных плоскостях. Прямая m, параллельная BC, пересекает плоскости (ABE) и (DCF) соответственно в точках H и P.

Доказать, что $HPFE$ – параллелограмм.

3. $DABC$ – тетраэдр, $\angle DBA = \angle DBC = 90°$, $DB = 6$, $AB = BC = 8$, $AC = 12$.

Постройте сечение тетраэдра

Найти KB_2, если $A_1B_1 : A_2B_2 = 3 : 4$, $KB_1 = 14$ см.

2. Вне плоскости α расположен Δ ABC, у которого медианы AA_1 и BB_1 параллельны плоскости α. Через вершины B и С проведены параллельные прямые, пересекающие α соответственно в точках E и F.

Доказать, что $ECBF$ – параллелограмм.

3. Все грани параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – квадраты со стороной a. Через середину AD параллельно плоскости DA_1B_1 проведена плоскость.

Найти $P_{сеч}$.

плоскостью, проходящей через середину DB и параллельной плоскости ADC.

Найти $S_{сеч}$.

ГЛАВА 3. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ 20 ЧАСОВ.

Урок 1
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ К ПЛОСКОСТИ

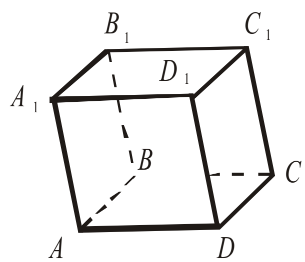
Цели: доказать лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой; дать определение прямой, перпендикулярной к плоскости.

Ход урока

I. Повторение пройденного материала.

Актуализация знаний.

Цель – повторить, как определяется угол между прямыми в пространстве.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. $\angle BAD = 30°$.

Найдите угол между прямыми AB и A_1D_1; A_1B_1 и AD; AB и B_1C_1.

$\angle BAD = 90°$.

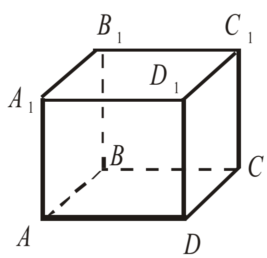
Докажите, что $BC \perp B_1C_1$ и $AB \perp A_1D_1$.

$\angle ADD_1 = 90°$.

Докажите, что $AB \perp CC_1$и $DD_1 \perp A_1B_1$.

II. Объяснение нового материала.

Рассмотрим модель куба. Как называются прямые AB и BC? Какие прямые называются перпендикулярными? Найдите угол между прямыми AA_1 и DC; BB_1 и AD. Эти прямые тоже перпендикулярные. В пространстве перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.



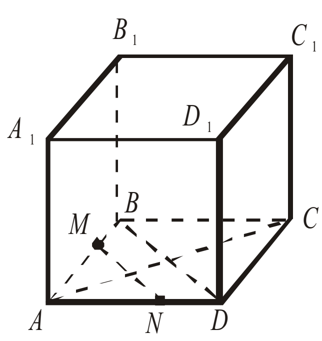
Рассмотрим прямые AA_1, CC_1 и DC.

Прямая AA_1 параллельна прямой CC_1, а прямая CC_1 перпендикулярна прямой CD. Нами установлено, что AA_1 перпендикулярна CD. Сформулируйте это утверждение.

Формулируется и доказывается лемма.

III. Решение задач.

№ 117.



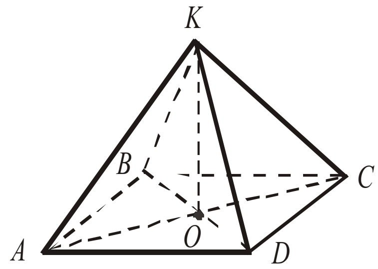
Рассмотрим модель куба. Найдите угол между прямой AA_1 и прямыми плоскости (ABC): AB, AD, AC, BD, MN.

Вывод: прямая AA_1 перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости (ABC). Такие прямая и плоскость называются перпендикулярными.

Дайте четкое определение прямой, перпендикулярной к плоскости. Докажите, что если прямая a перпендикулярна к плоскости α, то она пересекает эту плоскость (см. п. 16).

Доказать две теоремы, в которых устанавливается связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.

№ 120.



Д а н о : $ABCD$ – квадрат, $AB = a$,
$AC \cap BD = O$, $OK \perp (ABC)$, $OK = b$.
Найдите: AK, BK, CK, DK.
1. Доказать, что $AK = BK = CK = DK$.

2. $AK = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}$.

Домашнее задание. Теория (п. 15, 16). №№ 118, 121. (У к а з а н и е : медиана, проведенная в прямоугольном треугольнике к гипотенузе, равна ее половине.)

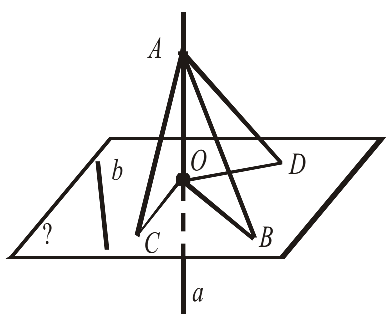
У р о к 2
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ К ПЛОСКОСТИ

Ц е л ь : сформировать навык применения изученных теорем к решению задач.

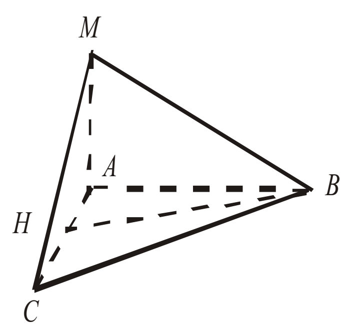
Х о д у р о к а

I. Проверка домашнего задания (теория у доски).

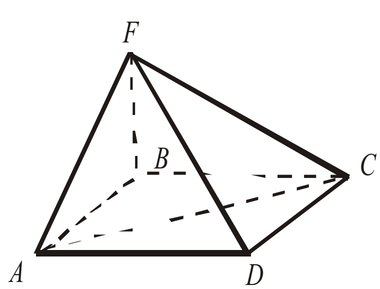
II. Устная работа.



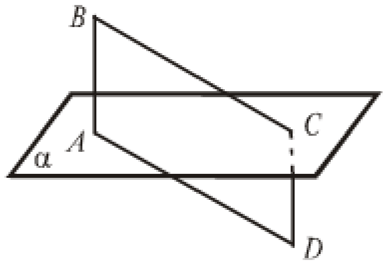
1. Д а н о : $OA \perp \alpha$.
Найдите $\angle AOC$, $\angle AOB$, $\angle AOD$.
Найдите $\angle(a, b)$.



2. Д а н о : $AM \perp (ABC)$, BH – медиана $\Delta\, ABC$.
Найдите $\angle(BH, AM)$.

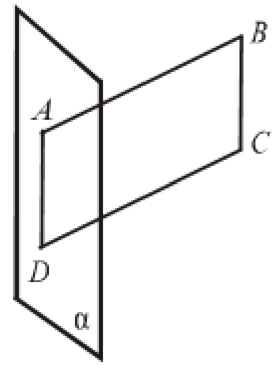


3. Д а н о : $BF \perp (ABC)$, $ABCD$ – квадрат.
Найдите $\angle(BF, AC)$, $\angle(BF, AD)$, $\angle(BF, DC)$.



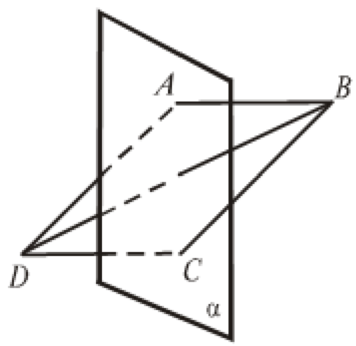
4. Д а н о : $AB \perp \alpha$, $CD \perp \alpha$, $AB = CD$.

Определите вид четырехугольника $ABCD$.



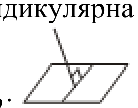
5. Д а н о : $ABCD$ – параллелограмм, $AB \perp \alpha$, $AC = 10$.

Найдите BD.



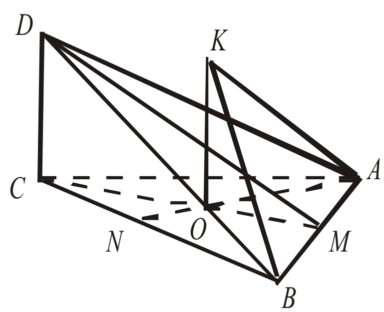
6. Д а н о : $ABCD$ – параллелограмм, $BD \perp \alpha$, $AB = 7$.

Найдите P_{ABCD}.

7. Верно ли утверждение: «Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости»? Ответ обоснуйте. *(Нет, привести контрпример:*  *.)*

III. Решение задач.

№ 122.



Д а н о : $\Delta\ ABC$ – правильный, $CD \perp (ABC)$, O – центр $\Delta\ ABC$, $OK \parallel CD$, $AB = 16\sqrt{3}$ см, $OK = 12$ см, $CD = 16$ см.

Найдите: BD, AD, AK, BK.

Р е ш е н и е

1. $BD = AD$, так как $\Delta\ BCD = \Delta\ ACD$ (как прямоугольные по двум катетам).

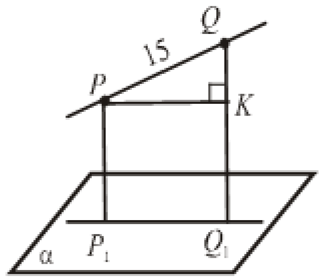
2. $AD = \sqrt{16^2 + (16\sqrt{3})^2} = \sqrt{16^2 \cdot 4} = 16 \cdot 2 = 32$ см.

3. $AK = BC$, так как $\Delta\ AOK = \Delta\ BOK$ (как прямоугольные по двум катетам).

4. $AO = \frac{\grave{a}\sqrt{3}}{3}$, $AO = \frac{16\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} = 16$ см.

5. $AK = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ см.

№ 125.



Д а н о : $PP_1 \perp \alpha$, $QQ_1 \perp \alpha$, $PQ = 15$ см, $PP_1 = 21{,}5$ см, $QQ_1 = 33{,}5$ см.

Найдите P_1Q_1.

Р е ш е н и е

1. $(PP_1 \perp \alpha,\ QQ_1 \perp \alpha) \Rightarrow PP_1 \perp QQ_1$.
2. $(PP_1, QQ_1) = \beta$, $\alpha \cap \beta = P_1Q_1$.
3. $QK = 33{,}5 - 21{,}5 = 12$ см.
4. $P_1Q_1 = PK = 9$ см.

Домашнее задание: теория (п. 15–16), №№ 126, 119 (б, в).

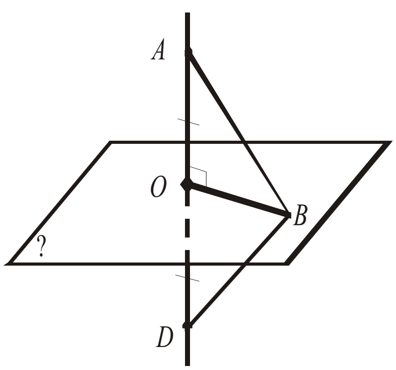
У р о к 3
ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Ц е л ь : доказать признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Х о д у р о к а

I. Актуализация знаний.

№ 119 (а).



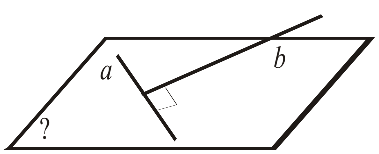
Д а н о : $OA \perp \alpha$, $OA = OD$.

Доказать, что $AB = DB$.

BO – медиана и высота в $\Delta\ ABD \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta\ ABD$ – равнобедренный $\Rightarrow AB = DB$.

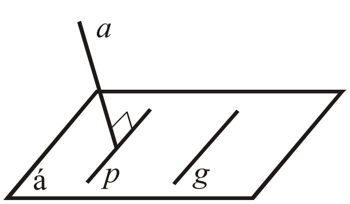
II. Объяснение нового материала.

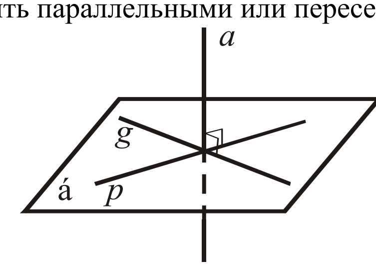
Как проверить перпендикулярность данной прямой к данной плоскости? Исходя из определения, необходимо проверить перпендикулярность данной прямой по отношению к любой прямой, лежащей в плоскости. Но таких прямых – бесконечно много. Сколько достаточно взять, чтобы ответить на данный вопрос?



Начнем с наименьшего количества прямых. Возьмем одну прямую, лежащую в плоскости. *(Учитель демонстрирует.)* Видно, что одной прямой недостаточно.

Возьмем две прямые. Две прямые на плоскости могут быть параллельными или пересекающимися.





Что вы замечаете? Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Признак формулируется. Записываются условия и требования. Что надо доказать, чтобы утверждать, что прямая *a* перпендикулярна плоскостиα? *(Что прямая a перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.)*

Далее работа с учащимися строится по плану:

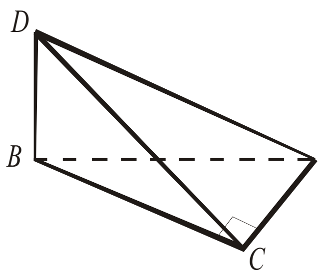
1) прочитать доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости (п. 17);

2) сделать чертеж;

3) оформить доказательство.

III. Решение задач.

№ 127.



Дано: Δ *ABC*, $\angle A + \angle B = 90°$, $BD \perp (ABC)$.

Доказать, что $CD \perp AC$.

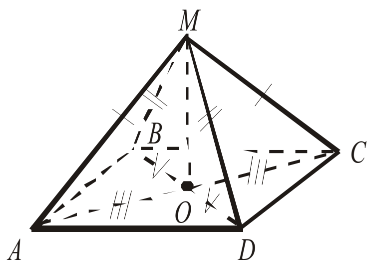
Доказательство

1. $\angle A + \angle B = 90° \Rightarrow \angle C = 90°$.

2. $\left.\begin{array}{l} \grave{A}\tilde{N} \perp \hat{A}\tilde{N} \\ \grave{A}\tilde{N} \perp BD \\ BD \cap BC \end{array}\right| \Rightarrow AC \perp (BCD).$

3. $\left.\begin{array}{l} \grave{A}\tilde{N} \perp (BCD) \\ CD \in (BCD) \end{array}\right| \Rightarrow CD \perp AC.$

№ 128.



Дано: *ABCD* – параллелограмм, *AM* = *MC*, *BM* = *MD*.

Доказать, что $MO \perp (ABC)$.

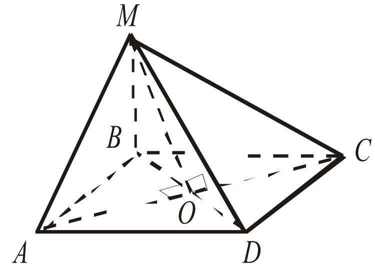
Доказательство

1. $\left.\begin{array}{l} \Delta\, \grave{A}\grave{I}\ \tilde{N} - \text{ðàâí î áåäðåí í û é} \\ \grave{I}\ \hat{I}\ - \text{ì åäèàí à} \end{array}\right| \Rightarrow \grave{I}\ \hat{I}\ \perp \grave{A}\tilde{N}.$

2. $\left.\begin{array}{l} \Delta\, BMD - \text{ðàâí î áåäðåí í û é} \\ \grave{I}\ \hat{I}\ - \text{ì åäèàí à} \end{array}\right| \Rightarrow \grave{I}\ \hat{I}\ \perp BD.$

3. $\left.\begin{array}{l} \grave{I}\ \hat{I}\ \perp \grave{A}\tilde{N} \\ \grave{I}\ \hat{I}\ \perp BD \\ AC \cap BD \end{array}\right| \Rightarrow MO \perp (ABC).$

№ 130.



Д а н о: $\angle MBA = \angle MBC = 90°$, $MB = m$, $AB = n$.

Найдите: AM, CM, DM; расстояние от M до AC и BD.

Р е ш е н и е

1. $\left.\begin{array}{l} MB \perp BC \\ MB \perp AB \\ BC \cap AB \end{array}\right| \Rightarrow MB \perp (ABC).$

2. $AM = CM = \sqrt{m^2 + n^2}$.

3. $\rho\ (M, BD) = MB = m$.

4. $\rho\ (M, AC)$ – ?

а) $\left.\begin{array}{l} AC \perp BD \\ AC \perp MB \\ BD \cap MB \end{array}\right| \Rightarrow AC \perp (MBD).$

б) $\left.\begin{array}{l} AC \perp (MBD) \\ MO \perp (MBD) \end{array}\right| \Rightarrow AC \perp MO.$

$\rho\ (M, AC) = MO$, $MO = \sqrt{m^2 + \left(\frac{n\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{m^2 + \frac{n^2}{2}}$.

Домашнее задание: теория (п. 17), №№ 129, 131.

У р о к 4
ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Ц е л ь : сформировать навык применения признака перпендикулярности прямой и плоскости к решению задач.

Х о д у р о к а

I. Проверка домашнего задания (теорема, №№ 129, 131).

II. Устная работа.

1. Можно ли утверждать, что прямая, проходящая через центр круга перпендикулярна:

а) диаметру;

б) двум радиусам;

в) двум диаметрам, перпендикулярна плоскости круга?

(а) нет; б) нет; в) да.)

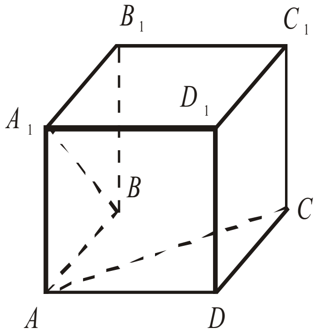
2. Можно ли утверждать, что прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна лежащим в этой плоскости:

а) двум сторонам треугольника;

б) двум сторонам квадрата;

в) диагоналям параллелограмма.

3. Дано $ABCD$ – куб. Заполните пропуски о взаимном расположении прямых и плоскостей:

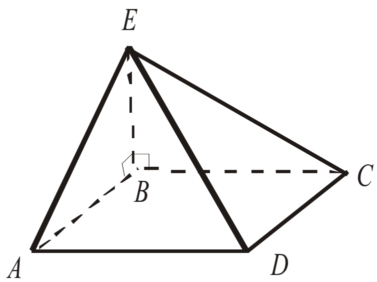


а) $CC_1 \ldots (DCB)$;
б) $AA_1 \ldots (DCB)$;
в) $D_1C_1 \ldots (DCB)$;
г) $B_1C_1 \ldots (DD_1C_1)$;
д) $B_1C_1 \ldots DC_1$;
е) $A_1D_1 \ldots DC_1$;
ж) $BB_1 \ldots AC$;
з) $A_1B \ldots BC$;
и) $A_1B \ldots DC_1$.

4. Три луча OM, ON, OK попарно перпендикулярны. Как расположен каждый из лучей по отношению к плоскости, определяемой двумя другими лучами?

Что моделирует в классной комнате описанную комбинацию?

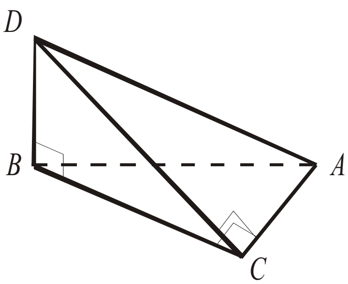
III. Решение задач.



1. Дано: $E \notin (ABCD)$, $ABCD$ – прямоугольник. $BE \perp AB$, $BE \perp BC$.

Доказать, что: а) $BE \perp CD$; б) $CD \perp (BCE)$.

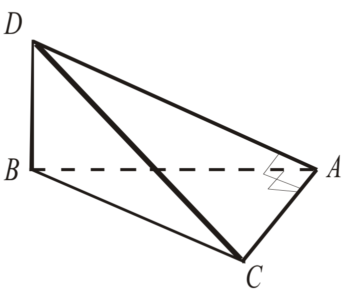
Найдите S_{ECD}, если $CD = 6$ см, $CE = 8$ см.



2. Дано: $ABCD$ – тетраэдр, $BD \perp BC$, $DC \perp AC$, $\angle ACB = 90°$.

Доказать, что $AC \perp BD$.

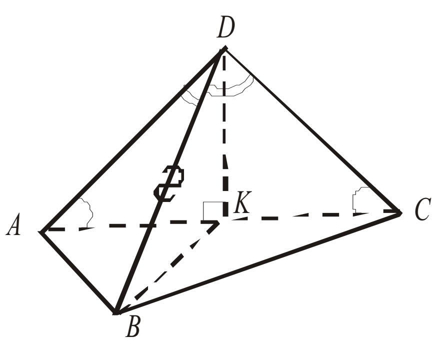
Найдите S_{ABD}, если $AD = 25$ см, $AB = 24$ см.



3. Дано: $ABCD$ – тетраэдр. $AD \perp AC$, $AD \perp AB$, $DC \perp CB$.

Доказать, что: а) $AD \perp BC$; б) $BC \perp (ADC)$.

Найдите S_{ABC}, если $BC = 4$ см, $AC = 3$ см.



4. Дано: $ABCD$ – тетраэдр.

$\angle ADC = \angle BDC$,

$\angle ABD = \angle DAB$.

Найдите $\angle (AB, CD)$.

Решение

1. Δ ADB – равнобедренный $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ DK – высота и медиана.

2. Δ $ADC = \Delta$ BDC (по двум сторонам и углу между ними) $\Rightarrow$ $AC = CB$.

3. Δ ÀÂÑ – ðàâí î áåäðåí í û é
ÑK – ì åäèàí à
$\Rightarrow$ ÑK – âû ñî òà.

4. $$\left.\begin{array}{l} \grave{A}\hat{A} \perp DK \\ AB \perp CK \\ DK \cap CK \end{array}\right| \Rightarrow AB \perp (CDK).$$

5. $$\left.\begin{array}{l} AB \perp (CDK) \\ CD \perp (CDK) \end{array}\right| \Rightarrow AB \perp CD.$$

У р о к 5
ТЕОРЕМА О ПЛОСКОСТИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ ПРЯМОЙ. ТЕОРЕМА О ПРЯМОЙ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ ПЛОСКОСТИ

Ц е л ь : доказать теоремы существования и единственности прямой (плоскости), перпендикулярной к данной плоскости (прямой).

Х о д у р о к а

I. Объяснение нового материала.

Доказать теорему существования и единственности плоскости, проходящей через любую точку пространства перпендикулярно к данной прямой (п. 17, № 133). Составить обратную теорему, доказать (п. 18).

II. Решение задач.

№№ 123, 132, 135, 137.

III. Домашнее задание: теория (п. 17 – 18), № 134.

У р о к 6
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Ц е л ь : проверить знание учащимися основных теоретических положений изученной темы.

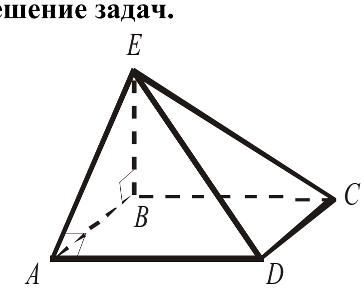
Х о д у р о к а

I. Диктант.

Закончите предложения. Сделайте рисунок.

1. Две прямые называются перпендикулярными, если…
2. Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если…
3. Прямая перпендикулярна плоскости, если она…
4. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то…
5. Через данную точку пространства можно провести прямую, ей перпендикулярную, и притом…
6. Все прямые, проходящие через данную точку прямой и перпендикулярные к этой прямой, лежат в…
7. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то…
8. Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости,…
9. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то…
10. Если две плоскости перпендикулярны прямой, то они…

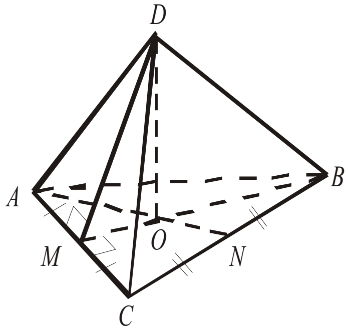
II. Решение задач.



1. Д а н о : $E \notin (ABCD)$. $ABCD$ – прямоугольник. $BE \perp AB$, $EA \perp AD$.

Доказать, что $AD \perp BE$.

Найти S_{EBD}, если $BD = 7$ см, $ED = 25$ см.



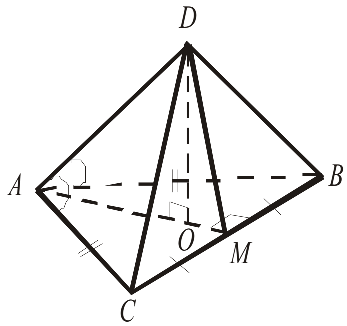
2. Д а н о : $ABCD$ – тетраэдр, ΔABC – правильный, $DO \perp (ABC)$.

Доказать, что $AB \perp DC$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

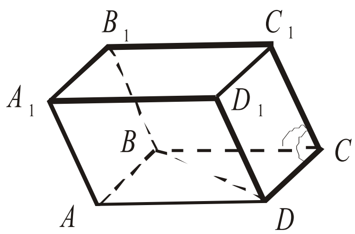
1. $AB \perp (DMC)$, так как $AB \perp MD$, $AB \perp MC$.

2. $\left.\begin{aligned} AB \perp (DMC) \\ DC \in (DMC) \end{aligned}\right| \Rightarrow AB \perp DC.$



3. Д а н о : $ABCD$ – тетраэдр, $\angle DAC = \angle DAB$, $AB = AC$.

Найдите $\angle (AD, BC)$.



4. Д а н о : $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед.

Все грани – равные ромбы.

$\angle C_1CB = \angle C_1CD$.

Найдите $\angle (C_1C, BD)$, $\angle (A_1C, BD)$.

Домашнее задание:

1. Через катеты BD и BC прямоугольных треугольников ABD и ABC проведена плоскость α, не содержащая их общий катет. Будет ли $AB \perp \alpha$?

2. Отрезок MH пересекает некоторую плоскость в точке K. Через концы отрезка проведены прямые HP и ME, перпендикулярные плоскости и пересекающие ее в точках P и E. Найдите PE, если HP = 4 см, HK = 5 см, ME = 12 см.

3. $ABCD$ – квадрат. Отрезок MD перпендикулярен к плоскости ABC. Докажите, что $MB \perp AC$.

4. $ABCD$ – прямоугольник. Отрезок AE перпендикулярен к плоскости ABC. EB = 15, EC = 24, ED = 20. Докажите, что треугольник EDC прямоугольный, и найдите AE.

5. Точка A принадлежит окружности, AK – перпендикуляр к ее плоскости, AK = 1 см, AB – диаметр, BC – хорда окружности, составляющая с AB угол 45°. Радиус окружности равен 2 см. Докажите, что треугольник KCB прямоугольный, и найдите KC.

У р о к 7
РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

Ц е л и : ввести понятие расстояния от точки до плоскости; перпендикуляра к плоскости из точки; наклонной, проведенной из точки к плоскости; основания наклонной; проекции наклонной; рассмотреть связь между наклонной, её проекцией и перпендикуляром.

Х о д у р о к а

I. Устная работа.

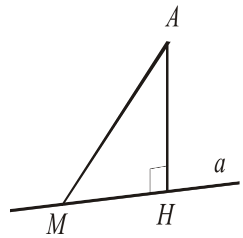
1. Верно ли утверждение: «Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум прямым, лежащим в этой плоскости»?

2. Верно ли утверждение: «Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости»?

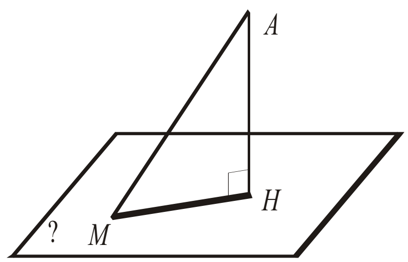
3. Как расположены по отношению друг к другу ребра, выходящие из одной вершины куба?

4. Как расположены плоскости верхней и нижней граней по отношению к боковым ребрам?
5. Что можно сказать о двух (трех, четырех) прямых, перпендикулярных к одной плоскости?
6. Верно ли утверждение: «Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны»?

II. Объяснение нового материала.

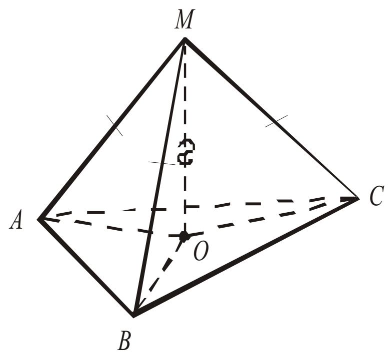


Как определяется расстояние от точки до прямой на плоскости? *(Как кратчайшее расстояние от точки до прямой, как длина перпендикуляра, проведенного из точки к данной прямой.)* Вспомнить, как называются отрезки *AM*, *MH*. Определить расстояние от точки до плоскости (п. 19).



III. Решение задач: №№ 138 (а), 139, 140, 143.

№ 143.



Д а н о : Δ *ABC* – правильный, *AB* = 6 см, $M \notin (ABC)$, *AM* = *BM* = *CM* = 4 см.

Найдите расстояние от *M* до (*ABC*).

Р е ш е н и е

Опустим перпендикуляр *MO* к плоскости (*ABC*).

1. $MO \perp (ABC)$.

2. Δ *AOM* = Δ *BOM* = Δ *COM* (как прямоугольные по гипотенузе и катету) $\Rightarrow$ *AO* = *BO* = *CO*, то есть *O* – центр описанной около Δ *ABC* окружности.

3. $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $R = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ см.

4. Δ *MOC* – прямоугольный, $MO = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2$ см.

Если точка равноудалена от всех вершин многоугольника, то во что она проецируется на его плоскости?

Составьте обратное утверждение для № 143.

Докажите, что любая точка прямой, перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через центр описанной около него окружности, равноудалена от всех его вершин. *(Для доказательства можно использовать тот же рисунок.)*

Верно ли утверждение: «Любая точка прямой, проходящей через центр описанной около многоугольника окружности перпендикулярно к плоскости этого многоугольника, равноудалена от всех его вершин» (№ 200).

Далее определяется расстояние между двумя параллельными плоскостями, между плоскостью и параллельной ей прямой (№ 144), между скрещивающимися прямыми (п. 19). Делаются соответствующие рисунки.

Домашнее задание: теория (п. 19), №№ 138 (б), 141, 142.

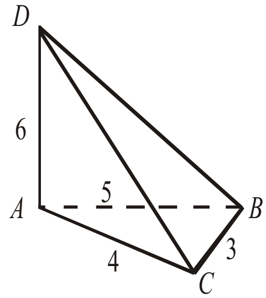
У р о к 8

ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Ц е л ь : доказать теорему о трех перпендикулярах.

Х о д у р о к а

I. Актуализация знаний.



1. Д а н о : $AD \perp (ABC)$, $AB = 5$, $AC = 4$, $CB = 3$, $AD = 6$.

Определите вид $\Delta\ ACB$.

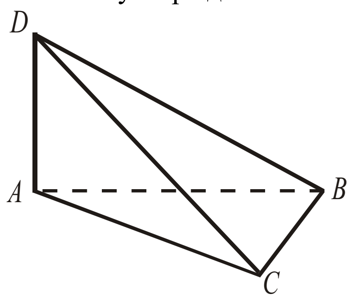
Найдите DC и DB.

AD – перпендикуляр к плоскости, DC – наклонная, AC – проекция этой наклонной на плоскость (ABC).

По условию задачи проекция AC перпендикулярна прямой CB, проходящей через основание наклонной – точку C.

Вы доказали, что и наклонная DC перпендикулярна прямой CB.

Сможем ли мы доказать это утверждение без метрических данных?



2. Д а н о : $AD \perp (ABC)$, $\angle ACB = 90°$.

Доказать, что: а) $AD \perp CB$;

б) $CB \perp (ADC)$; в) $CB \perp CD$.

Какое утверждение вы доказали? Это утверждение получило название теоремы о трех перпендикулярах.

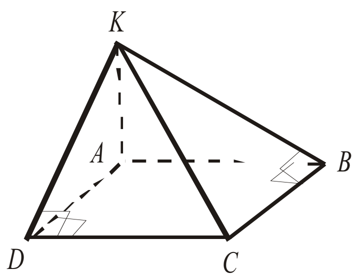
Учитель формулирует теорему о трех перпендикулярах. Доказывает её вместе с учащимися.

Сформулируйте обратную теорему, докажите ее (№ 153).

II. Решение задач: №№ 145, 146, 147.

III. Домашнее задание: теория (п. 20), №№ 148, 149, 150.

№ 150.



Д а н о : $ABCD$ – прямоугольник, $AK \perp (ABC)$, $KD = 6$ см, $KB = 7$ см, $KC = 9$ см.

Найдите $\rho\ (K, (ABC))$, $\rho\ (AK, CD)$.

Р е ш е н и е

1. $\rho\ (K, (ABC)) = AK$.

2. $$\left.\begin{array}{l} AK \perp (ABC) \\ AB \perp CB \\ AB - \text{ï ðî åêöèÿ} \\ KB - \text{í àêëîí í àÿ} \end{array}\right| \Rightarrow KB \perp CB.$$

3. $\Delta\ KBC$ – прямоугольный. $CB = \sqrt{9^2 - 7^2} = 4\sqrt{2}$ см.

4. $\Delta\ AKD$ – прямоугольный. $AK = \sqrt{6^2 - (4\sqrt{2})^2} = 2$ см.

5. $\rho\ (AK, CD) = AD$; $AD = 4\sqrt{2}$ см.

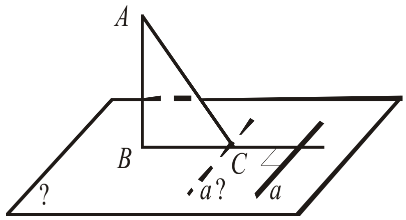
У р о к 9
ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Ц е л ь : сформировать навык применения теоремы о трех перпендикулярах к решению задач.

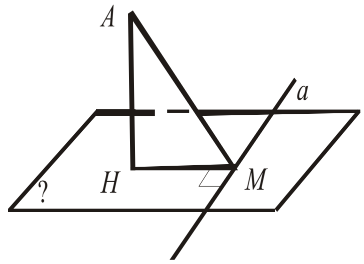
Х о д у р о к а

I. Проверка домашнего задания (теорема, №№ 149, 150).

II. Устная работа.



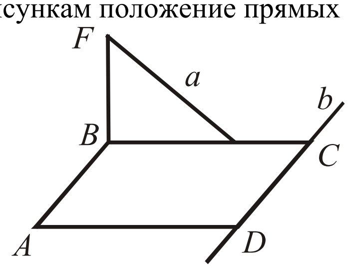
1. Верно ли утверждение: «Если прямая, принадлежащая плоскости, перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и самой наклонной»? *(Верно.)* Обоснуйте ответ.

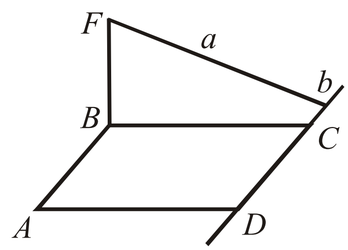


2. Верно ли утверждение: «Если прямая перпендикулярна проекции наклонной, то эта прямая перпендикулярна наклонной»? *(Неверно.)*

Какое условие теоремы о трех перпендикулярах здесь не выполняется? *(Прямая не принадлежит плоскости.)*

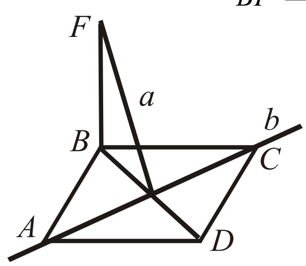
3. Установите по рисункам положение прямых a и b.

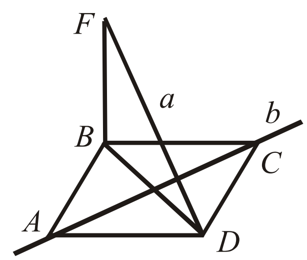




$ABCD$ – прямоугольник, $BF \perp (ABC)$

$ABCD$ – прямоугольник, $BF \perp (ABC)$

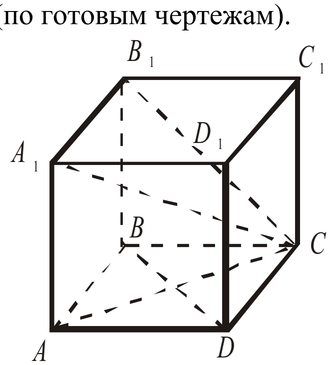




$ABCD$ – ромб, $BF \perp (ABC)$

$ABCD$ – ромб, $BF \perp (ABC)$

III. Решение задач (по готовым чертежам).

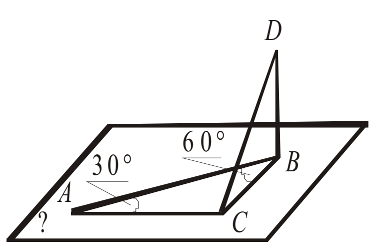


1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$:

1) ребро A_1B_1 перпендикулярно диагонали B_1C грани BCC_1B_1;

2) диагональ A_1C перпендикулярна диагонали BD основания $ABCD$.

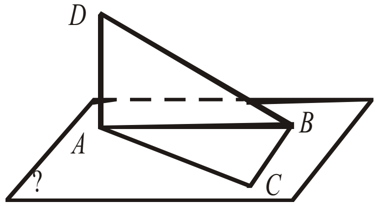
Докажите.



2.

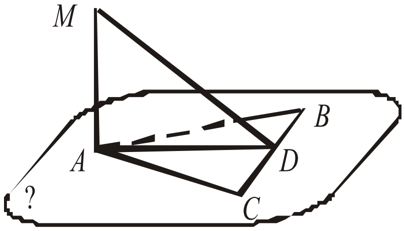
1) Дано: $\angle A = 30°$; $\angle ABC = 60°$, $DB \perp ABC$.

Докажите, что $CD \perp AC$.



2) Д а н о : $\angle BAC = 40°$, $\angle ACB = 50°$, $AD \perp ABC$.

Докажите, что $CB \perp BD$.



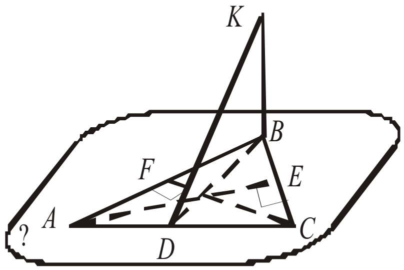
3.

1) Д а н о : $MA \perp (ABC)$, $AB = AC$, $CD = BD$.

Докажите, что $MD \perp BC$

2) Д а н о : $MA \perp (ABC)$, $BD = CD$, $MD \perp BC$.

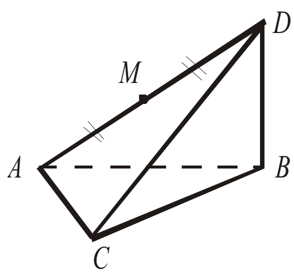
Докажите, что $AB = AC$.



4.

Д а н о : AE и CF – высоты, $BK \perp ABC$.

Докажите, что $KD \perp AC$.



5. Д а н о : ΔABC, $BD \perp (ABC)$, $AM = MD$, M – центр описанной около ΔADC окружности.

Найдите $\angle ACD + \angle ACB$.

IV. Решение задач: №№ 154, 156.

Домашнее задание: №№ 155, 159.

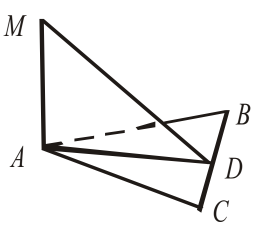
У р о к 10
ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Ц е л ь : сформировать навык применения теоремы о трех перпендикулярах к решению задач.

Х о д у р о к а

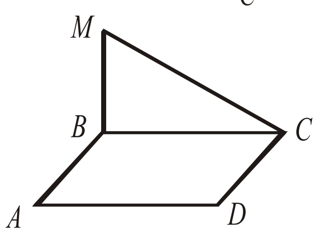
I. Проверка домашнего задания (теорема, №№ 155, 159).

II. Устная работа.



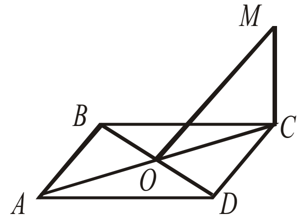
1. $AM \perp (ABC)$, $AB = AC$, $CD = DB$.

Докажите, что $MD \perp BC$.



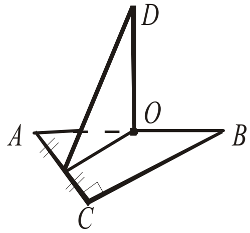
2. $ABCD$ – параллелограмм, $BM \perp (ABC)$, $MC \perp DC$.

Определите вид параллелограмма $ABCD$.



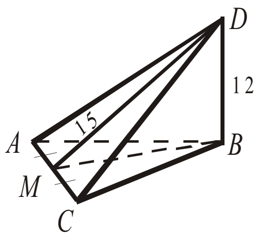
3. $ABCD$ – параллелограмм, $CM \perp (ABC)$, $MO \perp BD$.

Определите вид параллелограмма $ABCD$.



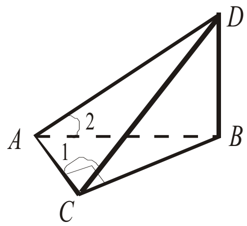
4. $\Delta\ ABC$, $\angle C = 90°$, O – центр описанной окружности, $AM = MC$, $OD \perp (ABC)$, $AB = 5$, $AC = 3$.

Найдите DM.



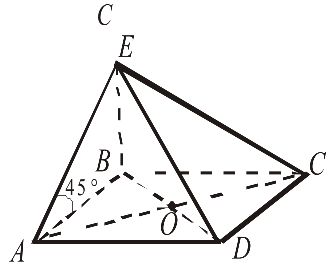
5. $\Delta\ ABC$, $AB = BC = AC$, $CD \perp (ABC)$, $AM = MB$, $DM = 15$, $CD = 12$.

Найдите S_{ADB}.



6. $\Delta\ ABC$, $\angle C = 90°$, $BD \perp (ABC)$, $AD = 2\ BD$.

Найдите $\angle 1 + \angle 2$.

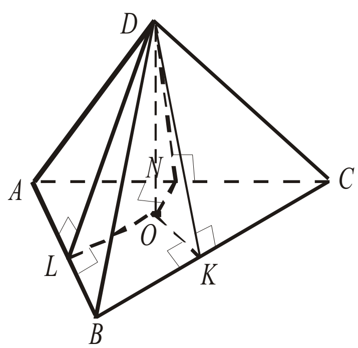


7. $ABCD$ – квадрат, $BE \perp (ABC)$, $\angle EAB = 45°$, $S_{ABCD} = 4$.

Найдите $S_{\Delta AEC}$.

III. Решение задач.

1. Если точка равноудалена от всех сторон многоугольника, то она проецируется на его плоскость в центр вписанной окружности.



Дано: $ML \perp AB$, $MN \perp AC$, $MK \perp BC$, $MO \perp (ABC)$.

Доказать, что O – центр вписанной в $\Delta\ ABC$ окружности.

Доказательство

1) $$\left.\begin{array}{l} MO \perp (ABC) \\ ML \perp AB \\ ML - \text{í àêëî í í àÿ} \\ OL - \text{ï ðî åêöèÿ} \end{array}\right| \Rightarrow OL \perp AB.$$

2) Аналогично $OK \perp BC$, $ON \perp AC$.

3) $OL = OK = ON$ (как проекции равных наклонных).

4) Точка O равноудалена от всех сторон треугольника, следовательно, является центром вписанной в него окружности.

2. Докажите обратное утверждение: «Если через центр вписанной в n-угольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости этого n-угольника, то каждая точка этой прямой равноудалена от сторон этого n-угольника». (Для доказательства можно использовать тот же рисунок). №№ 157, 158.

Домашнее задание: №№ 160, 205.

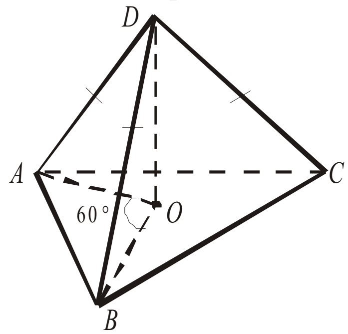
Урок 11
ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Цель: сформировать навык решения задач по изученной теме.

Ход урока

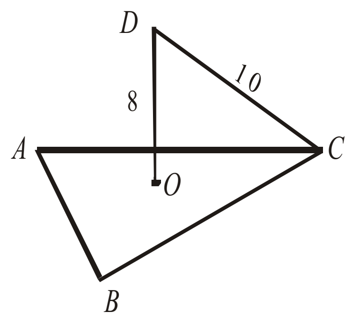
I. Проверка домашнего задания (№№ 160, 205).

II. Решение задач (по готовым чертежам).



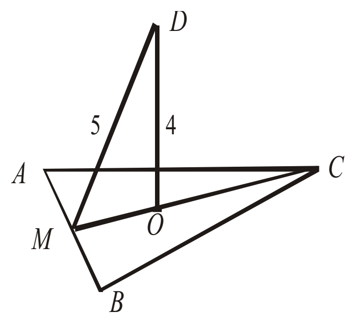
1. Δ ABC, $D \notin (ABC)$, $AD = BD = CD$, $\angle AOB = 60°$.

Найдите $\angle ACB$.



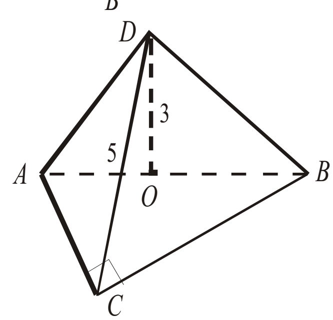
2. Δ ABC, $AB = BC = AC$, O – центр Δ ABC, $DO \perp (ABC)$, $DC = 10$, $DO = 8$.

Найдите S_{ABC}, расстояние от точки D до сторон Δ ABC.



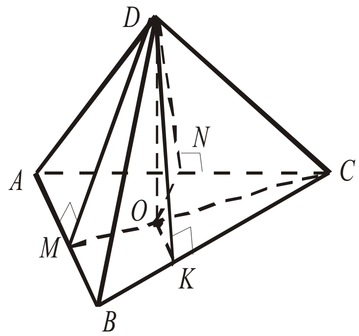
3. Δ ABC, $AB = BC = AC$, O – центр Δ ABC, $DO \perp (ABC)$, $DM = 5$, $DO = 4$.

Найдите $P_{\Delta ABC}$, AD, BD, DC.



4. Δ ABC, $\angle ACB = 90°$, $AO = OB$, $DO \perp (ABC)$, $DC = 5$, $DO = 3$.

Найдите R описанной около Δ ABC окружности, AB, AD, DB.



5. Δ ABC, $AC = CB = 10$, $AB = 12$, $DM \perp AB$, $DN \perp AC$, $DK \perp BC$, $DM = DN = DK$, $DO \perp (ABC)$, $DO = 1$.

Найдите DC.

III. Решение задач: №№ 199, 202, 203, 207.

Домашнее задание: №№ 204, 206.

Урок 12
УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

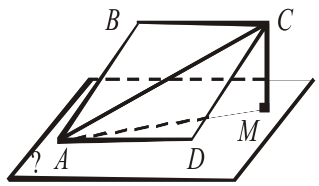
Цели: ввести понятие прямоугольной проекции фигуры; дать определение угла между прямой и плоскостью.

Ход урока

I. Объяснение нового материала построить в соответствии с п. 21.

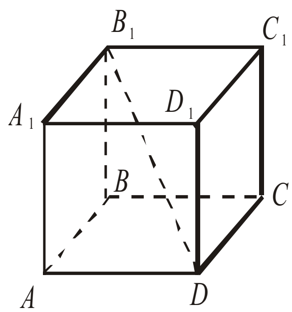
II. Решение задач: №№ 151, 163, 208, 209.

III. Решение задач (по готовым чертежам).



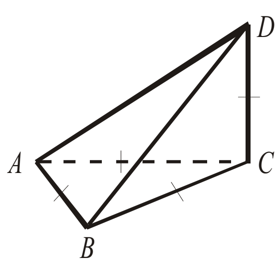
1. $ABCD$ – квадрат, $S_{ABCD} = 4$, $CM \perp \alpha$, $CM = \sqrt{6}$.

Найдите угол между прямой AC и плоскостью α.



2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.

Найдите угол между прямой DB_1 и плоскостью (DD_1C_1).



3. Δ ABC, $AB = BC = AC$, $CD \perp (ABC)$, $DC = AC$.

Найдите синус угла между прямой BD и плоскостью ADC.

Домашнее задание: теория (п. 21), №№ 164, 165.

Урок 13
ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

Цели: сформировать конструктивный навык нахождения угла между прямой и плоскостью; расстояния от точки до прямой; научить обосновывать или опровергать выдвигаемые предположения.

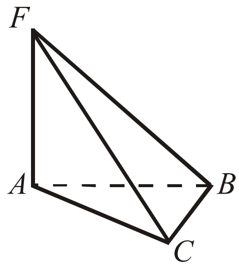
Ход урока

Учащимся выдаются готовые бланки, на которых они выполняют задания. Лабораторно-практическая работа построена на основе варьирования условий. «Одинаковые» картинки и разные к ним условия должны заставить учащихся думать, обосновывать или опровергать свои гипотезы, научить применять изученные теоретические положения.

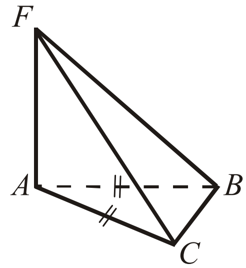
Учитель должен требовать от учащихся проговаривания всех определений и теорем.

I. Расстояние от точки до прямой

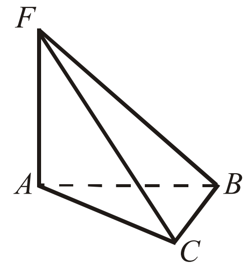
1. $AF \perp (ABC)$
Найти расстояние от F до CB.



$\Delta\, ABC$
прямоугольный
($\angle C = 90°$)

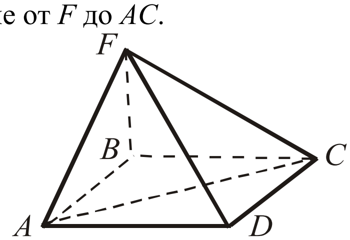


$\Delta\, ABC$
равнобедренный

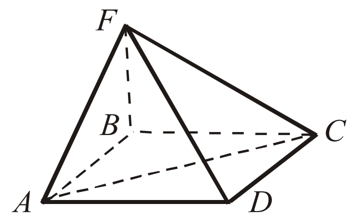


$\Delta\, ABC$
тупоугольный
($\angle C > 90°$)

2. Найти расстояние от F до AC.



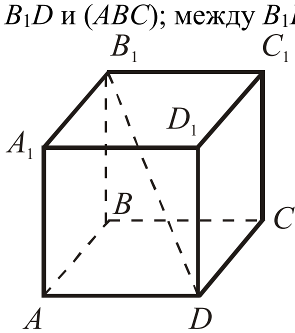
$FB \perp (ABC)$
$ABCD$ – прямоугольник



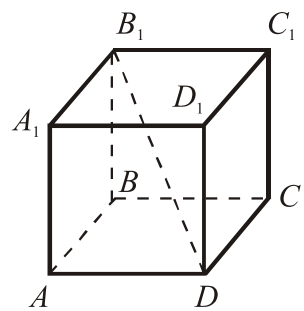
$FB \perp (ABC)$
$ABCD$ – ромб

II. Угол между прямой и плоскостью

1. Найдите угол между B_1D и (ABC); между B_1D и (DD_1C_1).

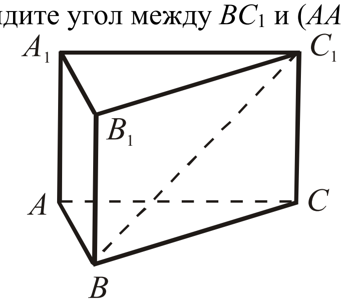


$ABCD$ – прямоугольник
$AA_1 \perp (ABC)$

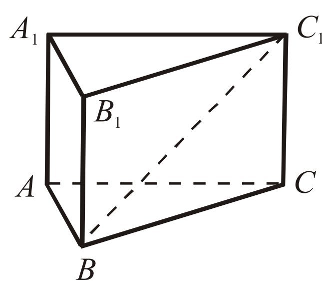


$ABCD$ – параллелограмм
$AA_1 \perp (ABC)$

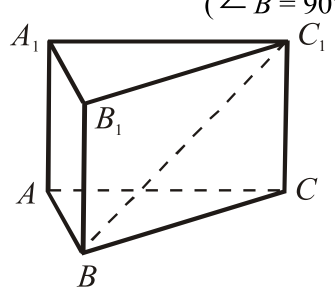
2. $BB_1 \perp (ABC)$. Найдите угол между BC_1 и (AA_1B_1).



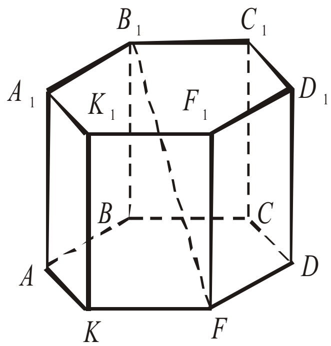
$\Delta\, ABC$ – равносторонний



$\Delta\, ABC$ – прямоугольный
($\angle B = 90°$)

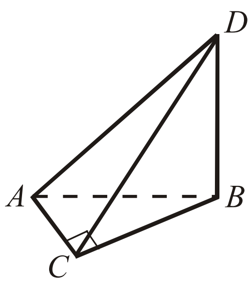


$\Delta\ ABC$ – тупоугольный ($\angle B > 90°$)

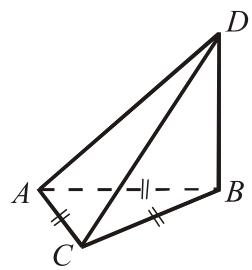


3. $AA_1 \perp (ABC)$.
Найдите угол:
между B_1F и (ABC);
между B_1F и KK_1F_1;
между B_1F и (AA_1B_1).

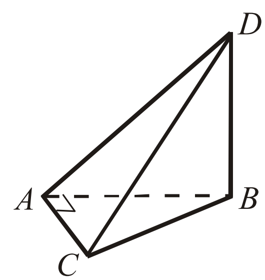
4. $BD \perp (ABC)$.
Найти угол между CD и плоскостью (ABD).



$\Delta\ ABC$
прямоугольный
($\angle C = 90°$)



$\Delta\ ABC$
равносторонний



$\Delta\ ABC$
прямоугольный
($\angle A = 90°$)

Урок 14
ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

Цель: ввести определение двугранного угла.

Ход урока

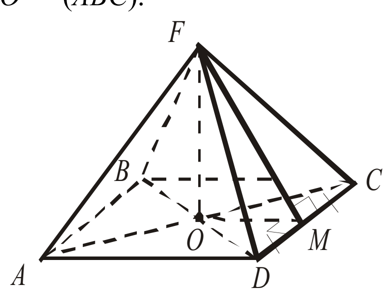
I. Объяснение нового материала.

Пункт 22 можно прочитать вместе с учащимися.

Один из механизмов построения линейного угла двугранного угла приведен в задаче № 166.

Покажите использование данного механизма.

$ABCD$ – квадрат, $FO \perp (ABC)$.



Постройте линейный угол двугранного угла $ADCF$.

1. $(ADC) \cap (DFC) = DC$.

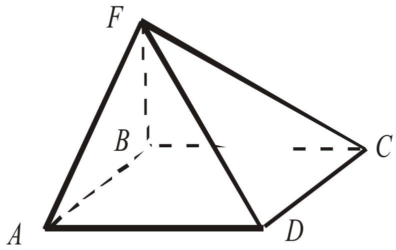
2. Из точки F к плоскости (ADC) перпендикуляр уже построен. Проведем из точки F перпендикуляр к прямой DC в плоскости (DCF).

$\Delta\ DFC$ – равнобедренный $\Rightarrow$ FM – медиана и высота.

$$\left.\begin{array}{l} FO \perp (ABC) \\ FM \perp DC \\ FM - \text{í àêëî í í àÿ} \\ OM - \text{ï ðî åêöèÿ} \end{array}\right| \Rightarrow OM \perp DC.$$

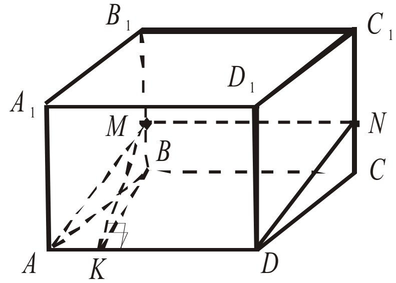
3. $\left.\begin{array}{l} \hat{I}\grave{I} \perp DC \\ FM \perp DC \end{array}\right| \Rightarrow \angle FOM$ – линейный угол угла *ADCF*.

II. Провести аналогичные рассуждения и выполнить построения.



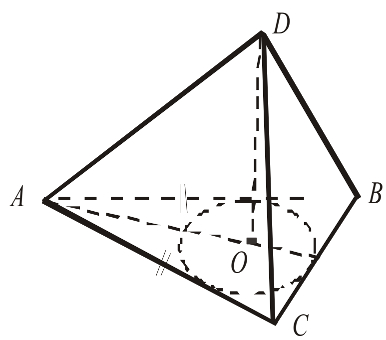
1. *ABCD* – прямоугольник, $BF \perp (ABC)$.

Найдите $\angle((ABC), (FDC))$.



2. *ABCD* – параллелограмм, $AA_1 \perp (ABC)$.

Найдите $\angle CDAM$.



3. Δ *ABC*, *AC* = *AB*, *O* – центр вписанной окружности.

Найдите $\angle((ABC), (BCD))$, $\angle((ABC), (ACD))$.

III. Решение задач: №№ 170, 171.

Домашнее задание: теория (п. 22), №№ 167, 168, 169, 172.

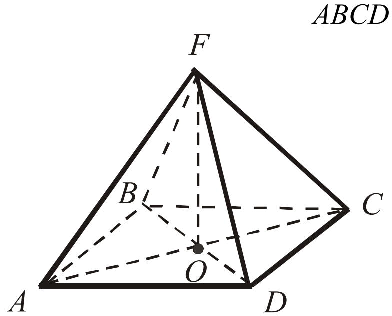
Урок 15

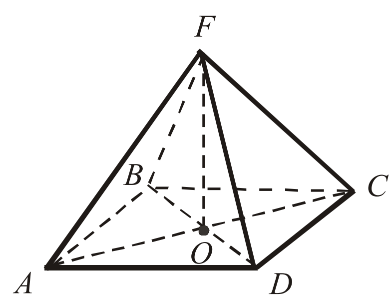
ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

Цели: сформировать конструктивный навык нахождения угла между плоскостями; отработать определение двугранного угла.

Ход урока

1. $FO \perp (ABC)$, *ABCD* – квадрат; $FO \perp (ABC)$, *ABCD* – ромб

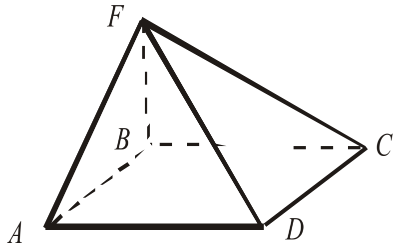


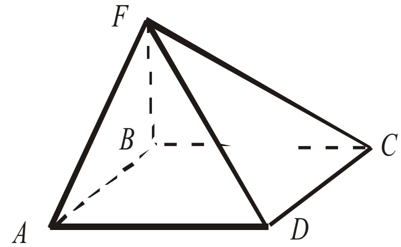


Найдите угол между (*ABC*) и (*FDC*);

Найдите угол между (*FDC*) и (*FBC*).

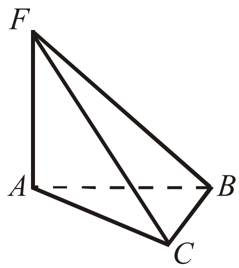
2. $FB \perp (ABC)$, *ABCD* – прямоугольник; $FB \perp (ABC)$, *ABCD* – ромб



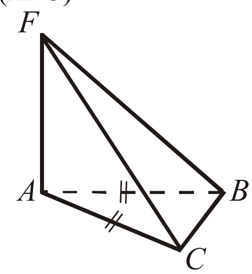


Найдите угол между (ABC) и (FDC);
Найдите угол между (AFB) и (FBC);
Найдите угол между (AFD) и (FBC).

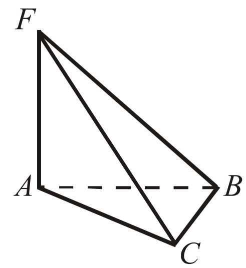
3. $AF \perp (ABC)$



Δ ABC
прямоугольный
($\angle C = 90°$)



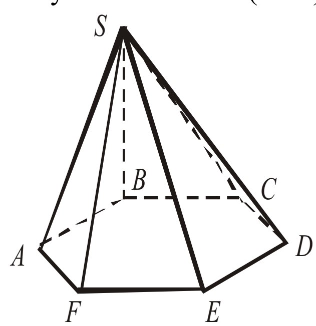
Δ ABC
равнобедренный



Δ ABC
тупоугольный
($\angle C > 90°$)

Найти угол между (ABC) и (FCB).

4. $ABCDEF$ – правильный шестиугольник $SB \perp (ABC)$.



Найдите угол между:
(ABS) и (CBS);
(SFE) и (ABC);
(ASF) и (ABC);
(FSE) и (DSE);
(FSE) и (BCS).

Урок 16
ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

Цель: сформировать навык решения задач по данной теме.

Ход урока

Решение задач: №№ 173, 176, 212, 213 (решите эту задачу, используя результат задачи № 212: $S_{ABC} = S_{пр} \cdot \cos\alpha$), 214 (решите двумя способами).

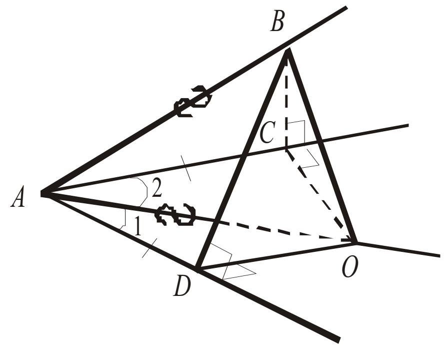
Домашнее задание: №№ 174, 175, 216.

Урок 17
СВОЙСТВО ДВУГРАННОГО УГЛА

Цель: доказать одно из свойств двугранного угла, часто применяющееся при решении задач.

Ход урока

Если два плоских угла трехгранного угла равны, то их общее ребро проецируется на биссектрису третьего плоского угла.



Дано: $\angle ABC = \angle ABD$, $BO \perp (ADC)$.

Доказать, что AO – биссектриса $\angle CAD$.

Доказательство

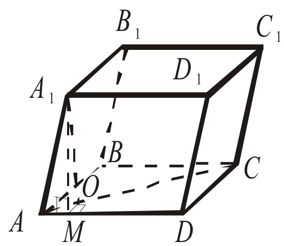
1. $\Delta\ ABD = \Delta\ ABC$ (как прямоугольные по гипотенузе и острому углу) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $AD = AC$.

2. $\Delta\ ADO = \Delta\ ACO$ (как прямоугольные по гипотенузе и катету) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2 \Rightarrow$ AO – биссектриса.

I. Решение задач.

№ 1. Все грани параллелепипеда – равные ромбы, со стороной a и острым углом α. Найдите высоту параллелепипеда.

Решение



1. $\left.\begin{array}{l}\angle \grave{A}_1\grave{A}D = \angle \grave{A}_1\grave{A}\hat{A} \\ A_1O \perp (ADC)\end{array}\right| \Rightarrow O \in$ биссектрисе $\angle A$.

2. $\left.\begin{array}{l}ABCD - \text{ðîìá} \\ O \in \text{áèññåêòðèñå } \angle A\end{array}\right| \Rightarrow O \in AC.$

3. Проведем $OM \perp AD$.

По теореме о трех перпендикулярах $A_1M \perp AD$.

4. $\Delta\ AA_1M$ – прямоугольный. $AM = a \cdot \cos\alpha$.

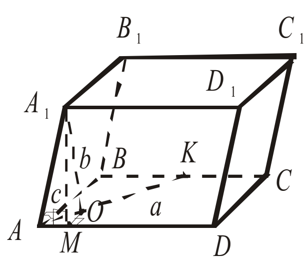
5. $\Delta\ AOM$ – прямоугольный. $AO = \dfrac{AM}{\cos\frac{á}{2}} = \dfrac{a\cdot\cos}{\cos\frac{á}{2}}$.

6. $\Delta\ A_1AO$ – прямоугольный.

$$H = A_1O = \sqrt{AA_1^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2\ \cos^2 á}{\cos^2\frac{á}{2}}} = \frac{a\sqrt{\cos^2\frac{á}{2} - \cos^2 á}}{\cos\frac{á}{2}}.$$

№ 2. Основанием параллелепипеда является прямоугольник со сторонами a и b. Боковое ребро длины c образует со смежными сторонами основания углы, равные φ. Найдите высоту параллелепипеда.

Решение



1. $\left.\begin{array}{l}\angle \grave{A}_1\grave{A}D = \angle \grave{A}_1\grave{A}\hat{A} \\ A_1O \perp (ABD)\end{array}\right| \Rightarrow O \in$ биссектрисе $\angle A$.

2. $\left.\begin{array}{l}\grave{A}K - \text{áèññåêòðèñà } \angle \grave{A} \\ \angle \hat{A}\grave{A}K = \angle DAK = 45^\circ\end{array}\right| \Rightarrow O \in AK.$

3. Проведем $OM \perp AD$. По теореме о трех перпендикулярах $A_1M \perp AD$.

4. $\Delta\ A_1AM$ – прямоугольный. $AM = c \cdot \cos\varphi$.

5. $\Delta\, AOM$ – прямоугольный. $AO = \dfrac{\grave{A}\grave{I}}{\cos 45°} = \sqrt{2} \cdot c \cdot \cos\varphi$.

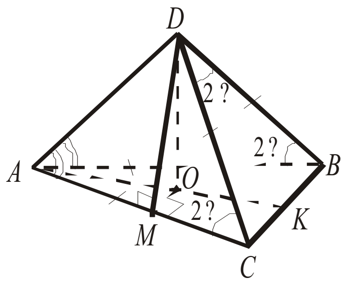
6. $\Delta\, A_1AO$ – прямоугольный.

$H = A_1O = \sqrt{AA_1^2 - AO^2} = \sqrt{c^2 - 2c^2\cos^2\varphi} = c\cdot\sqrt{1 - 2\cos^2\varphi} = = c\cdot\sqrt{-\cos 2\varphi}$.

№ 3. Все грани тетраэдра $ABCD$ – равные равнобедренные треугольники с боковыми сторонами, равными a, и углом между ними – 2α.

Найдите высоту тетраэдра.

Решение



1. $\left.\begin{array}{l}\angle DAC = \angle DAB \\ DO \perp (ABC)\end{array}\right| \Rightarrow O \in$ биссектрисе $\angle A$.

2. $\left.\begin{array}{l}\Delta \grave{A}\hat{A}\tilde{N} - \eth\grave{a}\hat{a}\acute{i}\ \hat{i}\ \acute{a}\mathring{a}\ddot{a}\eth\grave{a}\acute{i}\ \acute{i}\ \hat{u}\ \acute{e} \\ \grave{A}K - \acute{a}\grave{e}\tilde{n}\tilde{n}\mathring{a}\hat{e}\grave{o}\eth\grave{e}\tilde{n}\grave{a}\end{array}\right| \Rightarrow$ AK – медиана и высота. $O \in AK$.

3. $\Delta\, MDC$ – прямоугольный. $DM = a \cdot \sin 2\alpha$. $MC = a \cdot \cos 2\alpha$.

4. $AM = AC - MC = a - a \cdot \cos 2\alpha = a\,(1 - \cos 2\alpha) = 2a \sin^2\alpha$.

5. $\Delta\, AOM$ – прямоугольный. $OM = AM \cdot \operatorname{tg}\alpha = 2a \sin^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

6. $H = DO = \sqrt{DM^2 - OM^2} = \sqrt{a^2\sin^2 2a - a^2\,4\sin^4 a\cdot\operatorname{tg}^2 a} =$

$= 2a\sin a\cdot\sqrt{\cos^2 a - \sin^2 a\cdot tg^2 a} = a\cdot\dfrac{2}{\operatorname{tg} a}\cdot\sqrt{\cos 2a}$.

ДОМАШНЯЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант I

1. Чему равен угол между ребром двугранного угла и любой прямой, лежащей в плоскости его линейного угла?

2. Треугольник ABC – прямоугольный ($\angle C = 90°$), $\angle A = 30°$, $AC = a$, $DC \perp ABC$. $DC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. Чему равен угол между плоскостями ADB и ACB?

3. Через вершину прямого угла C равнобедренного прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость α, параллельная гипотенузе и составляющая с катетом угол 30°. Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью α.

Вариант II

1. Плоскость α пересекает грани двугранного угла по прямым AB и AC. Две пересекающиеся прямые, лежащие в плоскости α, перпендикулярны к ребру этого угла. Докажите, что $\angle BAC$ – линейный угол этого двугранного угла.

2. $ABCD$ – ромб. $\angle A = 60°$, $AB = m$, $BE \perp ABC$, $BE = \dfrac{m\sqrt{3}}{2}$. Найдите угол между плоскостями AED и ABC.

3. Через сторону ромба $ABCD$ проведена плоскость α. Сторона AB составляет с этой плоскостью угол 30°. Найдите угол между плоскостью ромба и плоскостью α, если острый угол ромба равен 45°.

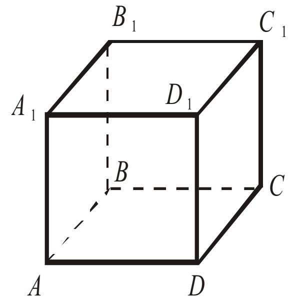
Урок 18
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

Цель: ввести определение перпендикулярных плоскостей, доказать признак перпендикулярности плоскостей.

Ход урока

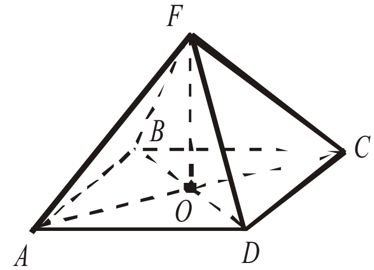
I. Объяснение нового материала построить в соответствии с пунктом 23.

Перед доказательством теоремы рассмотрите модели многогранников.



1. Плоскости (ABC) и (DD_1C_1) перпендикулярны. Докажите это.

Каким свойством обладает прямая DD_1 относительно указанных плоскостей? ($DD_1 \in (DD_1C_1)$, $DD_1 \perp (ABC)$.)



2. $ABCD$ – квадрат. $FO \perp (ABC)$.

Докажите, что $(AFC) \perp (ABC)$.

Каким свойством обладает прямая FO относительно указанных плоскостей? ($FO \in (AFC)$, $FO \perp (ABC)$.)

Когда можно утверждать, что плоскости перпендикулярны? Выскажите предположение.

Сформулировать признак. Доказать.

II. Решение задач: №№ 177, 179, 181, 183, 184.

Домашнее задание: теория (п. 23), №№ 178, 180, 182, 185.

Урок 19

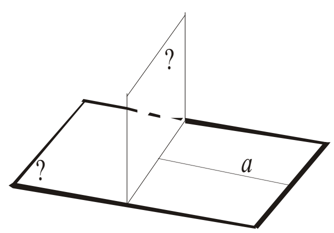
ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Цели: ввести понятие прямоугольного параллелепипеда; доказать свойство диагоналей прямоугольного параллелепипеда.

Ход урока

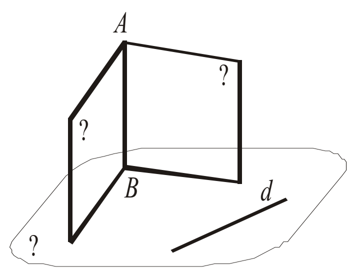
I. Проверка домашнего задания (признак).

II. Устная работа.



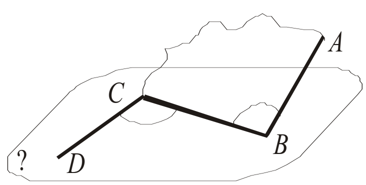
1. $a \in \alpha$, $a \perp \beta$.

Докажите, что $\beta \perp \alpha$.



2. $\beta \perp \alpha$, $\gamma \perp \alpha$, $\beta \cap \gamma = AB$, $d \in \alpha$.

Докажите, что $AB \perp d$.



3. $\angle ABC = \angle BCD$, $AB \perp \alpha$.

Докажите, что:

1) $CD \perp (ABC)$; 2) $\alpha \perp (ABC)$.

4. Плоскость линейного угла двугранного угла перпендикулярна каждой его грани. Доказать.

III. Объяснение нового материала.

Выставить на стол как можно больше параллелепипедов (прямых, наклонных, прямоугольных, кубов) разных размеров и цветов.

Попросить одного ученика убрать со стола все наклонные параллелепипеды, оставить только прямые.

Далее из оставшихся прямых параллелепипедов убрать те, в основании которых не лежит прямоугольник.

Все оставшиеся – это прямоугольные параллелепипеды (в том числе и кубы).

Какой параллелепипед называется прямоугольным? *(Прямой, в основании которого лежит прямоугольник.)* Сформулировать определение, доказать свойства прямоугольного параллелепипеда, используя для их открытия аналогию с прямоугольником.

В прямоугольнике все углы прямые.	В прямоугольном параллелепипеде все двугранные углы прямые.
В прямоугольнике диагонали равны.	…
В прямоугольнике квадрат диагонали равен сумме квадратов его сторон ($d^2 = a^2 + b^2$)	…

Рассмотреть куб как прямоугольный параллелепипед, у которого все три основания равны.

IV. Решение задач: №№ 187 (а), 188, 193, 195.

Домашнее задание: теория (п. 24), №№ 187 (б, в), 189, 191, 192, 217.

Урок 20

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Цель: сформировать навык решения задач по изученной теме.

Ход урока

См. Крамор В. С. «Повторяем и систематизируем школьный курс геометрии». – М.: Просвещение, 1993.

А

1. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 6, 4 и 12 м. Найдите диагональ параллелепипеда. (*Ответ:* 14 м.)

2. Измерения комнаты равны 6, 8 и 3 м. Найдите площадь всех ее стен, пола и потолка. (*Ответ:* 180 м^2.)

3. Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна 352 м^2. Найдите его измерения, если они относятся как 1 : 2 : 3.

(*Ответ:* 4 м, 8 м и 12 м.)

4. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания относятся как 7 : 24, а площадь диагонального сечения равна 50 м^2. Найдите площадь боковой поверхности. (*Ответ:* 124 м^2.)

В

1. Площадь диагонального сечения куба равна k. Найдите ребро куба, диагональ основания, диагональ куба, площадь его полной поверхности.

(*Ответ:* $\sqrt{\frac{k\sqrt{2}}{2}},\ \sqrt{k\sqrt{2}},\ \sqrt{\frac{3k\sqrt{2}}{2}},\ 3k\sqrt{2}$.)

2. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна k и составляет с плоскостью основания угол α, а с большей боковой гранью угол β. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

(*Ответ:* $S_{бок} = 2k^2 \sin\alpha \cdot (\sin\alpha + \sqrt{\cos(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta)})$.)

С

1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с меньшей боковой гранью угол β. Через большие стороны верхнего и нижнего оснований проведено сечение, образующее с плоскостью основания угол α. Зная, что периметр этого сечения равен P, найдите измерения параллелепипеда. (*Ответ:* большая сторона $\frac{P\sin\beta}{2\sqrt{2}\sin(45° + \beta)}$, меньшая сторона $\frac{P\cos\beta}{2\sqrt{2}\sin(45° + \beta)}$, $H = \frac{P\cos\beta}{2\sqrt{2}\sin(45° + \beta)}$.)

2. Диагональная плоскость прямоугольного параллелепипеда и лежащая в ней диагональ k образуют с одной и той же боковой гранью соответственно углы α и β. Найдите измерения параллелепипеда.

(*Ответ:* $k \sin\beta$, $k \sin\beta \operatorname{ctg}\alpha$, $\frac{k\sqrt{\sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta)}}{\sin\alpha}$, α, β – острые углы.)

Урок 21

ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Ход урока

В а р и а н т I

1. В треугольнике ABC $AC = CB = 10$ см, $\angle A = 30°$, BK – перпендикуляр к плоскости треугольника и равен $5\sqrt{6}$ см. Найдите расстояние от точки K до AC.

2. Точка M равноудалена от всех вершин равнобедренного прямоугольного треугольника ACB ($\angle C = 90°$), $AC = BC = 4$ см. Расстояние от точки M до плоскости треугольника равно $2\sqrt{3}$ см.

1) Докажите, что плоскость AMB перпендикулярна плоскости ABC.

2) Какой угол плоскость BMC составляет с плоскостью ABC?

3) Найдите угол между MC и плоскостью ABC.

3*. Найдите расстояние от точки E – середины стороны AB – до плоскости BMC.

В а р и а н т II

1. Через сторону AC треугольника ABC проведена плоскость α, удаленная от вершины B на расстояние, равное 4 см, $AC = BC = 8$ см, $\angle ABC = 22°30'$. Найдите угол между плоскостями ABC и α.

2. $ABCD$ – квадрат со стороной, равной 4 см. Треугольник AMB имеет общую сторону AB с квадратом, $AM = BM = 2\sqrt{6}$ см. Плоскости треугольника и квадрата взаимно перпендикулярны.

1) Докажите, что $BC \perp AM$.

2) Найдите угол между MC и плоскостью квадрата.

3*. Найдите расстояние от точки A до плоскости DMC.

В а р и а н т III

1. $ABCD$ – ромб со стороной 4 см, $\angle ADC = 150°$, BM – перпендикуляр к плоскости ромба и равен $2\sqrt{3}$ см. Найдите расстояние от точки M до AD.

2. Точка M равноудалена от всех сторон правильного треугольника ABC, сторона которого равна 4 см. Расстояние от точки M до плоскости ABC равно 2 см.

1) Докажите, что плоскость AMO перпендикулярна плоскости BMC (O – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ABC).

2) Найдите угол между плоскостью BMC и плоскостью ABC.

3) Найдите угол между MC и плоскостью ABC.

3*. Точка E принадлежит AC, причем $AE : EC = 2 : 1$. Найдите расстояние от точки E до плоскости BMC.

В а р и а н т IV

1. Через сторону AD ромба $ABCD$ проведена плоскость α, удаленная от BC на расстояние, равное $3\sqrt{3}$ см. Сторона ромба – 12 см, $\angle BCD = 30°$. Найдите угол между плоскостью ромба и плоскостью α.

2. Треугольник ACB – прямоугольный ($\angle C = 90°$), $AC = CB = 3$ см. Треугольник AMC имеет общую сторону AC с треугольником ACB; $AM = CM = \sqrt{6}$ см. Плоскости треугольников взаимно перпендикулярны.

1) Докажите, что $MC \perp BC$.

2) Найдите угол между MB и плоскостью ABC.

3*. Найдите расстояние от середины AB – точки E – до плоскости BMC.

Домашнее задание: карточки.

В а р и а н т I

1. $AB \perp α$; $CD \perp α$; $B \in α$, $D \in α$; $AB = CD$. Каково взаимное расположение прямой AC и плоскости α?

2. К плоскости проведены равные наклонные. Равны ли их проекции?

3. Точка M равноудалена от всех вершин прямоугольного треугольника, катеты которого 6 см и 8 см. Расстояние от точки M до плоскости треугольника равно 12 см. Найдите расстояние от точки M до вершин треугольника.

4. Основанием прямоугольного параллелепипеда является квадрат со стороной, равной a. Расстояние от бокового ребра до скрещивающейся с ним диагонали параллелепипеда равно…

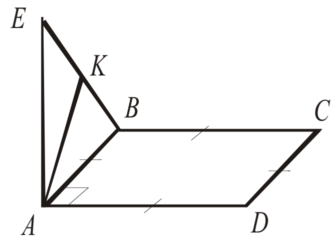


Рис. 1

5. На рисунке 1 *ABCD* – квадрат. *AE* – перпендикуляр к плоскости квадрата. $K \in EB$. Чему равен угол между *BC* и *AK*?

6. В треугольнике *ABC* $AB = 10$; $\angle A = 30°$, $BD \perp ABC$, $BD = 12$. Расстояние от точки *D* до *AC* равно…

7. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат со стороной, равной 4. Диагональ параллелепипеда равна 8. Угол между диагональю и боковой гранью равен…

8. Точка *M* равноудалена от всех сторон квадрата *ABCD*, сторона которого равна 8 см. Расстояние от точки *M* до плоскости квадрата равно 4 см. Угол между плоскостью (*MCD*) и плоскостью квадрата равен…

9. Прямая *a* и плоскость α перпендикулярны плоскости β. Каково взаимное расположение прямой *a* и плоскости α?

10. Треугольник *MAB* и квадрат *ABCD* имеют общую сторону *AB,* и их плоскости взаимно перпендикулярны. Угол *MAD* равен…

Вариант II

1. $AB \perp \alpha$, $CD \parallel AB$ ($B \in \alpha$, $D \in \alpha$), $E \in \alpha$, $\angle ECD = 40°$. Тогда $\angle CED$ равен…

2. Две наклонные, проведенные к плоскости, имеют равные проекции. Равны ли сами наклонные?

3. Точка *D* равноудалена от всех вершин правильного треугольника и находится на расстоянии 3 см от его плоскости. Высота треугольника равна 6 см. Расстояние от точки *D* до вершин треугольника равно…

4. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат со стороной, равной *a*. Расстояние между скрещивающимися диагоналями противоположных граней параллелепипеда равно…

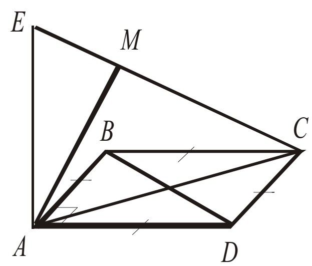


Рис. 2

5. На рисунке 2 *ABCD* – квадрат. *AE* – перпендикуляр к плоскости квадрата, $M \in EC$. Угол между *BD* и *AM* равен…

6. В треугольнике *ABC* $AB = 16$ см, $\angle A = 30°$, *BK* – перпендикуляр к плоскости треугольника. Найдите *BK*, если расстояние от точки *K* до *AC* равно 17 см.

7. В прямоугольном параллелепипеде основанием служит квадрат. Диагональ параллелепипеда равна 10 см и составляет с плоскостью боковой грани угол 60°. Найдите стороны основания.

8. Точка *D* равноудалена от всех сторон правильного треугольника *ABC*. Расстояние от точки *D* до плоскости треугольника равно $2\sqrt{3}$. Радиус описанной около треугольника окружности равен 4. Угол между плоскостью *CDB* и плоскостью треугольника равен…

9. Две плоскости перпендикулярны к третьей. Линии пересечения этих плоскостей с третьей плоскостью параллельны. Каково взаимное положение этих плоскостей?

10. Прямоугольный треугольник *ACB* ($\angle C = 90°$) и треугольник *CMB* имеют общую сторону *BC*. Плоскости треугольников взаимно перпендикулярны. Угол *ACM* равен…

УРОК 22 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант I

1. Диагональ куба равна 6 см. Найдите:

а) ребро куба;

б) косинус угла между диагональю куба и плоскостью одной из его граней.

2. Сторона *AB* ромба *ABCD* равна *a*, один из углов равен 60°. Через сторону *AB* проведена плоскость α на расстоянии $\frac{a}{2}$ от точки *D*.

а) Найдите расстояние от точки *C* до плоскости α.

б) Покажите на рисунке линейный угол двугранного угла *DABM*, $M \in \alpha$.

в) Найдите синус угла между плоскостью ромба и плоскостью α.

Вариант II

1. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат; диагональ параллелепипеда равна $2\sqrt{6}$ см, а его измерения относятся как 1 : 1 : 2. Найдите:

а) измерения параллелепипеда;

б) синус угла между диагональю параллелепипеда и плоскостью его основания.

2. Сторона квадрата *ABCD* равна *a*. Через сторону *AD* проведена плоскость α на расстоянии $\frac{a}{2}$ от точки *B*.

а) Найдите расстояние от точки *C* до плоскости α.

б) Покажите на рисунке линейный угол двугранного угла *BADM*, $M \in \alpha$.

в) Найдите синус угла между плоскостью квадрата и плоскостью α.

ГЛАВА 3. МНОГОГРАННИКИ 12 ЧАСОВ

Урок 1
ПОНЯТИЕ МНОГОГРАННИКА. ПРИЗМА

Цель: ввести понятия многогранника, призмы и их элементов.

Ход урока

I. Объяснение нового материала построить в соответствии с пунктом 30.

При разговоре с учащимися использовать как можно больше моделей.

Следует отметить, что в школьном курсе геометрии изучаются только простейшие выпуклые многогранники – выпуклые призмы и пирамиды, правильные многогранники.

О полуправильных выпуклых многогранниках (изогонах, изоэдрах), выпуклых многогранниках, играющих большую роль в кристаллографии (параллелоэдрах), невыпуклых многогранниках (телах Пуансо) учащимся можно лишь сообщить, показывая модели, репродукции.

Для закрепления понятий элементов многогранников следует с учащимися заполнить таблицу, раздав на каждую парту по модели.

№	Наименование многогранника	*В*	*Р*	*Г*	Эйлерова характеристика (*В* – *Р* + *Г*)
1	Куб	8	12	6	8 – 12 + 6 = 2
2	Тетраэдр	4	6	4	4 – 6 + 4 = 2
3	Параллелепипед	…	…	…	…
4	Четырехугольная призма	…	…	…	…
5	Четырехугольная пирамида	…	…	…	…
6	Треугольная призма	…	…	…	…
7	n-угольная призма	$n + 1$	$2n$	$n + 1$	
8	n-угольная пирамида	$2n$	$3n$	$n + 2$	
9	n-угольная усеченная пирамида	$2n$	$3n$	$n + 2$	

В – число вершин многогранника,

Р – число ребер многогранника,

Г – число граней многогранника.

В школе изучаются многогранники, Эйлерова характеристика которых равна 2. Это равенство верно для произвольного выпуклого многогранника (доказано Л. Эйлером в 1752 г.).

Такого рода многогранники получили название многогранников нулевого рода.

Учащиеся на опыте убедились, что у тетраэдра число вершин и число граней одинаково. Интересно выяснить, существуют ли еще такие многогранники.

Контрольные вопросы

1. Объясните, что такое: а) многогранник; б) поверхность многогранника.

2. Какой многогранник называется выпуклым?

3. Куб – выпуклый многогранник (проверьте). Как, имея пилу, получить из деревянного куба модель невыпуклого многогранника?

4. Дан выпуклый многогранник. Что называют: а) его гранью; б) его ребром; в) его вершиной?

5. Назовите известные вам многогранники. а) Выпуклым или невыпуклым является каждый из них? б) Сколько граней, ребер и вершин у каждого?

6. Приведите пример многогранника, все грани которого: а) треугольники (кроме тетраэдра); б) квадраты (кроме куба); в) прямоугольники (кроме прямоугольного параллелепипеда).

7. Дан квадрат. На нем как на основании по разные стороны построены куб и пирамида. Сколько вершин, ребер и граней в полученном многограннике?

8. Два тетраэдра имеют общую грань и расположены по разные стороны от нее. Сколько вершин, ребер и граней имеет полученный многогранник?

9. Сколько трехгранных, двугранных и плоских углов: а) у тетраэдра; б) у параллелепипеда?

Д о п о л н и т е л ь н а я л и т е р а т у р а :

1. *Смирнова И. М.* В мире многогранников. – М.: Просвещение, 1995 г.

2. *Савченко В.* Полуправильные многогранники // Квант, 1976, № 1.

3. *Гамаюнов В.* Модели звездчатых многогранников // Квант, 1981, № 2.

Призма определяется как **многогранник**, **обладающий определенными свойствами**. На этом уроке достаточно ввести понятие призмы, ее элементов (п. 30).

II. Решение задач: №№ 219, 223.

Домашнее задание: теория (п. 27, 30). №№ 220, 295.

У р о к 2

ПРИЗМА. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ПРИЗМЫ

Ц е л и : рассмотреть виды призм, ввести понятие площади поверхности призмы; вывести формулу для вычисления площади поверхности прямой призмы.

Х о д у р о к а

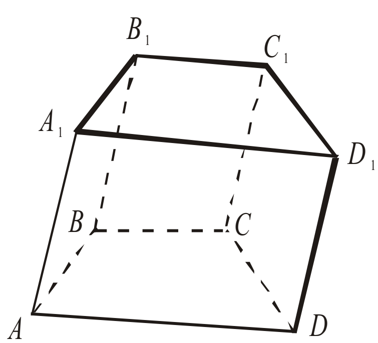
I. Проверка домашнего задания (№№ 219, 223)

II. Устная работа.

1. Среди изображенных тел выберите те, которые являются призмами.

1 2 3 4 5 6

2. Назовите для призмы:



а) вершины;
б) основания;
в) боковые ребра;
г) боковые грани;
д) противоположные грани;
е) диагонали граней;
ж) диагонали призмы;
и) диагональные сечения.

3. Закончите предложения.

1) **Высотой** призмы называется…

2) **Диагональю** призмы называется…

3) **Диагональным сечением** призмы называется сечение плоскостью, проходящей через…

4) **Параллелепипедом** называется…

5) **Прямоугольным параллелепипедом** называется…

6) **Кубом** называется прямоугольный параллелепипед, у которого…

7) Примеры моделей призмы и параллелепипеда из реальной жизни:..

4. Ответьте на вопросы:

1) Какие многоугольники лежат в основании призмы?

2) В каких плоскостях лежат основания призмы?

3) Какими отрезками являются боковые ребра призмы?

4) Какими фигурами являются боковые грани призмы?

5) Что представляет собой диагональное сечение призмы?

6) Какими фигурами являются все грани параллелепипеда?

7) Какими фигурами являются все грани прямоугольного параллелепипеда?

8) Сколько измерений у прямоугольного параллелепипеда?

9) Почему все высоты призмы равны между собой?

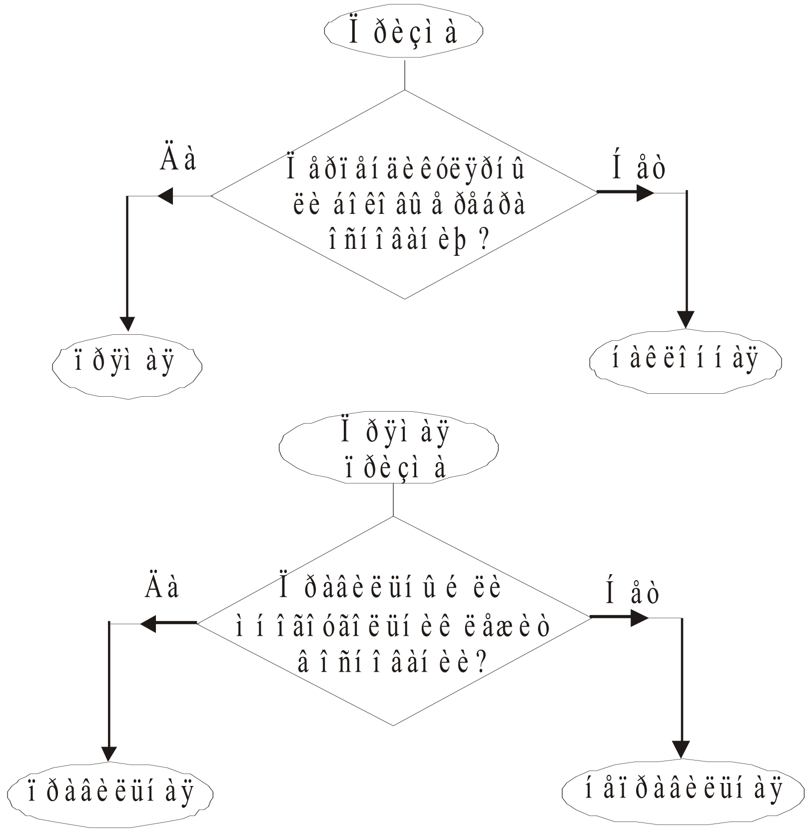
10) Какие многоугольники являются основанием и боковой гранью пятиугольной призмы?

11) Призма имеет 30 граней. Какой многоугольник лежит в ее основании? Сколько вершин и ребер имеет эта призма?

12) Сколько диагоналей можно провести в четырехугольной призме?

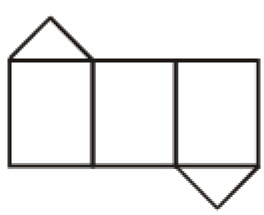
III. Объяснение нового материала.

Виды призм



Устно № 218.

Далее ввести понятие боковой поверхности, полной поверхности прямой призмы (п. 30). Можно использовать развертки призм.



IV. Решение задач: №№ 221, 222, 225, 230.

Домашнее задание: теория (п. 30), №№ 224, 229, 231.

Урок 3
ПРИЗМА. НАКЛОННАЯ ПРИЗМА

Цель: вывести формулу для вычисления боковой поверхности наклонной призмы, сформировать навык ее использования при решении задач.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания.

II. Устная работа.

1. Продолжите предложения.

1) **Призма** называется **наклонной**, если…
2) **Призма** является **прямой**, если…
3) **Призма** называется **правильной**, если…
4) **Боковой поверхностью** призмы называется…
5) Площадью полной поверхности призмы называется сумма…
6) Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению…
7) Все двугранные углы при боковых гранях прямой призмы…
8) Правильная четырехугольная призма, высота которой равна стороне основания, является…

2. Ответьте на вопросы.

1) В какой призме боковые ребра параллельны ее высоте?
2) Если все ребра призмы равны, то будет ли она правильной? Ответ поясните.
3) Существует ли призма, у которой только одна боковая грань перпендикулярна основанию? Ответ поясните.
4) Может ли диагональ прямоугольного параллелепипеда быть меньше:
   а) бокового ребра?
   б) стороны основания?
   в) диагонали боковой грани?
5) Дан наклонный параллелепипед. Известно, что угол основания равен 150°. Какое из диагональных сечений параллелепипеда больше?
6) Будет ли сечение, перпендикулярное боковому ребру призмы, перпендикулярно к ее боковой грани? Ответ обоснуйте.

3. Выберите верный ответ из числа предложенных.

1) Чему равна площадь боковой поверхности куба с ребром 10 см?
   а) 40 см^2; б) 400 см^2; в) 100 см^2; г) 400 см.
2) Чему равна площадь полной поверхности куба с ребром 6 см?
   а) 36 см^2; б) 144 см^2; в) 216 см^2; г) 144 см.
3) Чему равна площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы, если её высота h, сторона основания a?
   а) ha; б) $4ah$; в) 4^2h; г) $4(a + h)$.
4) Чему равна площадь полной поверхности куба, если его диагональ равна d ?
   а) $2d^2$; б) $6d^2$; в) $3d^2$; г) $4d^2$.
5) Прямоугольный параллелепипед имеет три измерения, равные $a = 5$ см; $b = 8$ см; $h = 10$ см. Какова площадь его полной поверхности?
   а) 400 см^2; б) 160 см^2; в) 280 см^2; г) 340 см^2.
6) По стороне основания a и боковому ребру b найдите полную поверхность правильной треугольной призмы.
   а) $\frac{\grave{a}^2\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\grave{a}^2\sqrt{3}}{2} + 3ab$; в) $a^2 + 3ab$; г) $3a(\sqrt{3} + 2)$.

III. Решение задач: №№ 227, 228, 236, 237.

Домашнее задание: теория (п. 30), №№ 238, 295, 297.

Дополнительно (см.: Зив Б. Г., Мейлер В. М., Баханский А. Г. Задачи по геометрии. – М.: Просвещение, 1997.).

1

1) В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$). Плоскость боковой грани AA_1C_1C перпендикулярна плоскости основания. Докажите, что CC_1B_1B – прямоугольник.

2) В наклонной треугольной призме угол между двумя боковыми гранями прямой. Площади этих граней равны 50 и 120 см^2. Длина бокового ребра 10 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

2

1) Основанием наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит прямоугольник $ABCD$. Плоскости граней AA_1D_1D и BB_1C_1C перпендикулярны плоскости основания. Докажите, что остальные боковые грани – прямоугольники.

2) В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ угол между гранями AA_1C_1C и CC_1B_1B прямой. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если боковое ребро равно 5 см, а площади граней AA_1B_1B и CC_1B_1B равны соответственно 130 и 50 см^2.

3

1) Основанием наклонной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC$, $\angle A_1AC = \angle A_1AB < 90°$. Докажите, что CC_1B_1B – прямоугольник.

2) В наклонной треугольной призме площади двух боковых граней равны 40 и 80 см^2. Угол между ними равен 120°. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если длина бокового ребра равна 10 см.

4

1) Основанием наклонной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит правильный треугольник ABC. Вершина A_1 равноудалена от всех вершин нижнего основания. Докажите, что CC_1B_1B – прямоугольник.

2) В наклонной треугольной призме площади двух боковых граней равны 6 и $3\sqrt{2}$ см^2. Угол между ними равен 135°. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если длина бокового ребра равна 3 см.

Урок 4
ПРИЗМА

Цель: сформировать навык решения задач по изученной теме.

Ход урока

Решение задач: №№ 232, 233, 234, 235.

Домашнее задание: №№ 290, 296, 298.

Урок 5
ПИРАМИДА

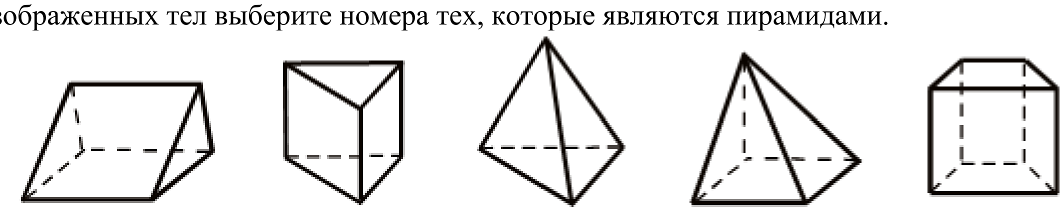
Цель: ввести понятие пирамиды, площади полной поверхности пирамиды.

Ход урока

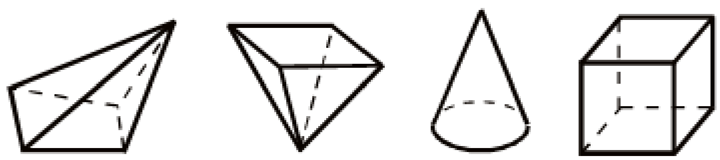
I. Объяснение нового материала построить в соответствии с пунктом 28.

Контрольные вопросы.

1. Среди изображенных тел выберите номера тех, которые являются пирамидами.

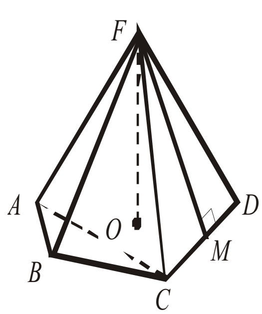


1 2 3 4 5



6 7 8 9

2. Назовите:



а) основание пирамиды;

б) высоту;

в) апофему;

г) диагональное сечение;

д) сколько их проведено, сколько можно еще провести;

е) какая это пирамида?

3. Продолжите предложения.

1) Высотой пирамиды называется…
2) Апофемой пирамиды называется…
3) Площадью полной поверхности пирамиды называется…
4) Площадью боковой поверхности пирамиды называется…
5) Диагональное сечение пирамиды – сечение пирамиды плоскостью, проходящей через два несоседних…

II. Решение задач: №№ 240, 241, 242, 245.

Домашнее задание: теория (п. 32), №№ 239, 243, 244.

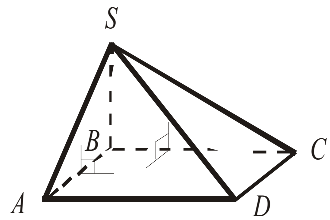
Урок 6
ПИРАМИДА. ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Цель: ввести понятие правильной пирамиды.

Ход урока

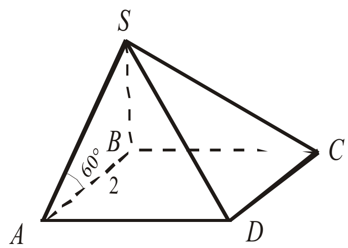
I. Проверка домашнего задания (№№ 243, 244).

II. Устная работа.

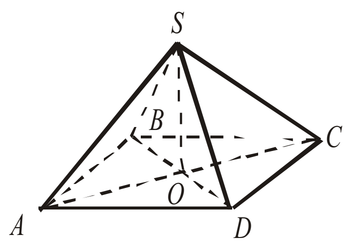


1. Дано: $SBA \perp ABCD$, $SBC \perp ABCD$. $ABCD$ – прямоугольник.
Доказать:
1) $SB \perp ABCD$;
2) $\angle SAB$ – линейный угол $SADC$.

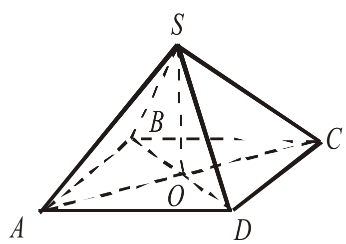
2. Основание пирамиды – прямоугольник, одно боковое ребро перпендикулярно основанию пирамиды. Определить вид боковых граней.



3. Дано: $SABCD$ – пирамида, $ABCD$ – квадрат, $AB = 2$, $\angle SAB = 60°$.
Найдите $S_{бок}$.



4. Дано: $SABCD$ – пирамида, $ABCD$ – ромб, $AB = BD$, $P_{ABCD} = 16$, $SO \perp (ABC)$, $SO = 1$.
Найдите $S_{бок}$.



5. Дано: $SABCD$ – пирамида, $ABCD$ – ромб, $AC = 6$, $BD = 8$, $SO \perp (ABC)$, $SO = 1$.
Найдите $S_{бок}$.

III. Объяснение нового материала (п. 29)

IV. Решение задач: №№ 254, 255, 257.

Домашнее задание: теория (п. 33), №№ 256, 258, 259.

Контрольные вопросы

Продолжите предложения.

1. У правильной пирамиды:
   а) боковые ребра…
   б) боковые грани…
   в) апофемы…
   г) двугранные углы при основании…
   д) двугранные углы при боковых ребрах…

2. Каждая точка высоты правильной пирамиды равноудалена от всех __________________ основания.

3. Каждая точка высоты правильной пирамиды равноудалена от всех __________________ граней.

4. Боковыми гранями правильной пирамиды являются…

5. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на…

Урок 7
ПИРАМИДА. ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Цель: сформировать навык решения задач по изученной теме.

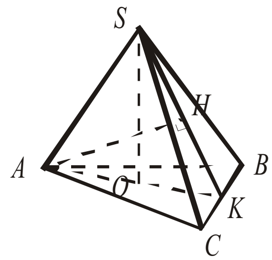
Ход урока

I. Проверка домашнего задания.

II. Устная работа.

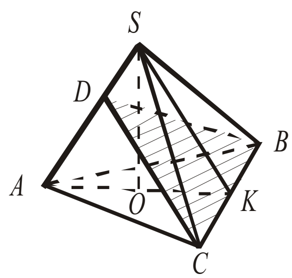
1. Как в правильной пирамиде найти точку, равноудаленную от всех вершин?

2. Как в правильной пирамиде найти точку, равноудаленную от всех ее граней?



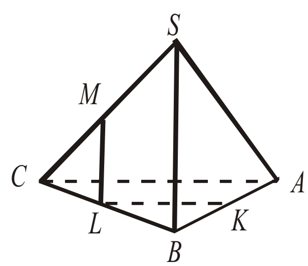
3. Дано: *SABC* – правильная пирамида, *SO* – высота, $AO \perp BC$, $AH \perp SK$, $AH \cap SK = H$.

Доказать: $AS \perp BC$; $AH \perp CSB$.



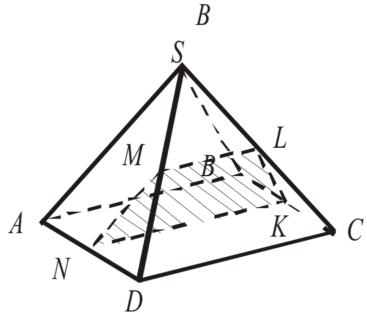
4. Дано: *SABC* – правильная пирамида, *SO* – высота, $KD \perp AS$.

Доказать: $CBD \perp AS$.



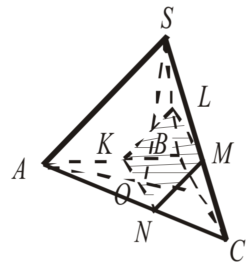
5. Дано: *SABC* – правильная пирамида, *KL* || *AC*, *LM* || *BS*.

Доказать: $KL \perp LM$.



6. Дано: *SABCD* – правильная пирамида, *KN* || *BA*, *KL* || *BS*.

Доказать: *KLMN* || *ASB*, *KLMN* – трапеция.



7. Дано: *SABC* – правильная пирамида, *KN* || *BC*, *NM* || *AS*.

Доказать: сечение *KLMN* – прямоугольник.

III. Решение задач: №№ 261, 262, 264, 266.

Домашнее задание: теория (п. 29), №№ 260, 263, 265.

Контрольные вопросы

В ы б е р и т е в е р н ы й о т в е т из числа предложенных.

1. Чему равна высота правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и боковым ребром b?

а) $h = \sqrt{b^2 - 3a^2}$; б) $h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$; в) $h = \sqrt{3b^2 - a^2}$.

2. Чему равна сторона основания правильной шестиугольной пирамиды, если её высота h и боковое ребро b?

а) $a = \sqrt{2b^2 - a^2}$; б) $a = \sqrt{b^2 + h^2}$; в) $a = \sqrt{b^2 - h^2}$.

3. Чему равна высота правильной шестиугольной пирамиды со стороной основания a и боковым ребром b?

а) $h = \sqrt{b^2 - a^2}$; б) $h = \sqrt{b^2 + a^2}$; в) $h = \sqrt{2b^2 - a^2}$.

4. Чему равна апофема правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h?

а) $l = \sqrt{h^2 + a^2}$; б) $l = \sqrt{h^2 - a^2}$; в) $l = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$.

5. Чему равна апофема правильной треугольной пирамиды со стороной a и боковым ребром b?

а) $l = \sqrt{b^2 - 3a^2}$; б) $l = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$; в) $l = \sqrt{b^2 + 3a^2}$.

6. Чему равна апофема правильной шестиугольной пирамиды со стороной a и высотой h?

а) $l = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + h^2}$; б) $l = \sqrt{3\grave{a}^2 + h^2}$; в) $l = \sqrt{a^2 + h^2}$.

7. Чему равна площадь полной поверхности правильной пирамиды?

а) $S = Ph + S_{осн}$; б) $S = \frac{Pl}{2} + S_{осн}$; в) $S = Pl + S_{осн}$, где h – высота пирамиды, l – апофема, P – периметр основания.

8. Имеет ли правильная четырехугольная пирамида ось симметрии?

а) да; б) нет.

9. Сколько плоскостей симметрии имеет:

– правильная четырехугольная пирамида?

а) 2; б) 3; в) 4.

– правильный тетраэдр?

а) 1; б) 3; в) не имеет.

10. Дана правильная треугольная пирамида. Верно ли, что ее апофемы равны?

а) да; б) нет.

У р о к 8
ПИРАМИДА. КЛЮЧЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Ц е л ь : рассмотреть свойства пирамид, имеющих равные боковые ребра; равные апофемы.

Х о д у р о к а

I. Объяснение нового материала.

1. Вершина пирамиды проецируется в центр описанной около основания окружности, если:

а) боковые ребра пирамиды равны;

б) боковые ребра составляют с плоскостью основания равные углы;

в) боковые ребра составляют с высотой пирамиды равные углы.

Доказать. Составить обратные задачи. Доказать.

2. Вершина пирамиды проецируется в центр вписанной в основание окружности, если:

а) апофемы равны;

б) двугранные углы при ребрах основания равны;

в) апофемы составляют с высотой пирамиды равные углы.

Доказать. Составить обратные задачи. Доказать.

II. Решение задач: №№ 246, 248, 250, 251.

Домашнее задание: теория (знать ключевые задачи), №№ 247, 249, 252.

Контрольные вопросы

1. Боковые ребра пирамиды равны между собой. Может ли основание пирамиды быть: 1) ромбом; 2) прямоугольником; 3) правильным шестиугольником?

2. Боковые ребра пирамиды равны между собой. Как расположена проекция вершины пирамиды на основании, если основание: 1) прямоугольник; 2) прямоугольный треугольник?

3. Двугранные углы при основании пирамиды равны между собой. Может ли в основании пирамиды быть: 1) равнобедренный треугольник; 2) ромб; 3) прямоугольник?

4. Вершина пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей основания. Что можно сказать о двугранных углах при основании пирамиды, если основание: 1) параллелограмм; 2) ромб; 3) равнобедренная трапеция?

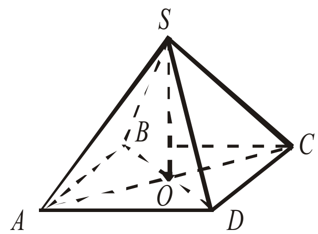
Урок 9
УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

Цель: ввести понятие усеченной пирамиды.

Ход урока

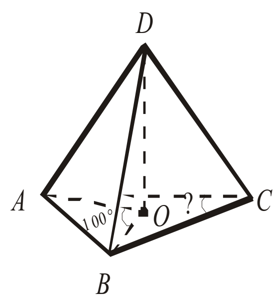
I. Проверка домашнего задания (№ 252).

II. Устная работа.



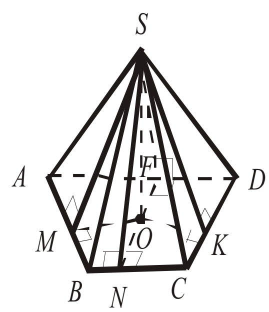
1. Дано: $SABCD$ – пирамида, $ABCD$ – параллелограмм, $SA = SB = SC = SD$.

Найдите $\angle DAB$.



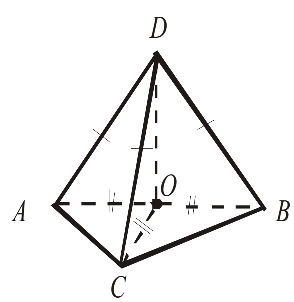
2. Дано: $ABCD$ – пирамида, $AD = BD = CD$, $\angle AOB = 100°$, $DO \perp (ABC)$.

Найдите $\angle \alpha$.



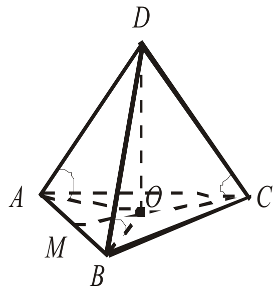
3. Дано: $SABCD$ – пирамида, $ABCD$ – трапеция, $SO \perp (ABC)$, $MS = FS = NS = KS$, $AD = 10$, $BC = 6$.

Найдите P_{ABCD}.

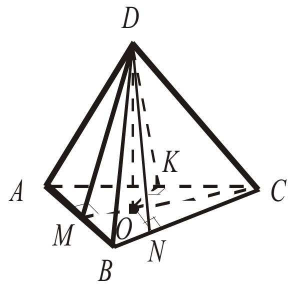


4. Дано: $ABCD$ – пирамида, $DO \perp (ABC)$, $O \in AB$, $AO = OB$, $AD = CD = BD$.

Определите вид $\Delta\, ABC$.



5. Д а н о : $ABCD$ – пирамида, $\angle DAO = \angle DBO = \angle DCO = 45°$, $BC = 10$, $AB = 12$.
Найдите DO.



6. Д а н о : $ABCD$ – пирамида, $\angle DMO = \angle DNO = \angle DKO = 45°$, $BC = 10$, $AB = 12$.
Найдите DO.

III. Объяснение нового материала построить в соответствии с пунктом 34 учебника.

Обязательно решить в классе задачу № 267. Дополнительно доказать, что сечение – многоугольник, подобный основанию, и площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины.

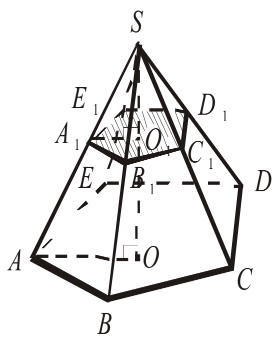
№ 267.

Если пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то:

1) боковые ребра и высота пирамиды делятся этой плоскостью на пропорциональные части;

2) сечение – многоугольник, подобный основанию;

3) площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины.



Д а н о : в пирамиде $SABCDE$ $SO \perp ABCDE$.
$A_1B_1C_1D_1E_1 \parallel ABCDE$.

Доказать: 1) $\frac{\grave{A}\grave{A}_1}{\grave{A}_1 S} = \frac{BB_1}{B_1 S} = \mathrm{K} = \frac{OO_1}{O_1 S}$;

2) $A_1B_1C_1D_1E_1$ $ABCDE$;

3) $\frac{S_{\text{ñå÷}}}{S_{\text{î ñí}}} = \frac{SO_1^2}{SO^2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

1) $A_1B_1C_1D_1E_1 \parallel ABCDE$, поэтому $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$, $C_1D_1 \parallel CD$, ..., $A_1O_1 \parallel AO$ (§ 34, теорема 2).

Следовательно, $\frac{\grave{A}\grave{A}_1}{\grave{A}_1 S} = \frac{BB_1}{B_1 S}$; $\frac{BB_1}{B_1 S} = \frac{CC_1}{C_1 S}$; …; $\frac{\grave{A}\grave{A}_1}{\grave{A}_1 S} = \frac{OO_1}{O_1 S}$.

В каждой из этих пропорций имеются попарно одинаковые отношения, и потому $\frac{\grave{A}\grave{A}_1}{\grave{A}_1 S} = \frac{BB_1}{B_1 S} = \mathrm{K} = \frac{OO_1}{O_1 S}$.

2) ΔA_1SB_1 ΔASB, ΔB_1SC_1 ΔBSC, следовательно, $\frac{\grave{A}_1 B_1}{AB} = \frac{B_1 S}{BS}$, $\frac{B_1 S}{BS} = \frac{B_1 C_1}{BC}$, откуда $\frac{\grave{A}_1 B_1}{AB} = \frac{B_1 S}{BS}$.

Аналогично получим:

$\frac{\hat{A}_1 \tilde{N}_1}{\hat{A}\tilde{N}} = \frac{\tilde{N}_1 S}{CS}$ и $\frac{C_1 S}{CS} = \frac{C_1 D_1}{CD}$, откуда $\frac{B_1 C_1}{BC} = \frac{C_1 D_1}{CD}$ и т. д.

Продолжая брать пары подобных треугольников, получим:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \ldots,$$

то есть стороны сечения пропорциональны сторонам основания. Кроме того, стороны одноименных углов взаимно параллельны, и потому эти углы соответственно равны; следовательно, по определению подобных многоугольников $A_1B_1C_1D_1E_1$ $ABCDE$.

3) $A_1B_1C_1D_1E_1$ $ABCDE$, следовательно, $\frac{S_{сеч}}{S_{осн}} = \frac{A_1B_1^2}{AB^2}$.

Но ΔA_1SO_1 ΔASO и ΔA_1SB_1 ΔASB, поэтому $\frac{O_1S}{OS} = \frac{A_1S}{AS}$ и $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1S}{AS}$, откуда $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{O_1S}{OS}$.

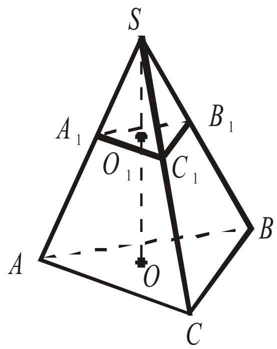
Из (1) и (2) следует, что $\frac{S_{сеч}}{S_{осн}} = \frac{O_1S^2}{OS^2}$.

С л е д с т в и е . Площадь сечения, параллельного основанию пирамиды, – квадратная функция расстояния его плоскости от вершины (или основания) пирамиды.

Пусть $SO = h$, $SO_1 = x$, тогда $\frac{S_{сеч}}{S_{осн}} = \frac{x^2}{h^2}$ и $S_{сеч} = \frac{S_{осн}}{h^2} \cdot x^2$;

$S_{осн}$ и h для данной пирамиды величины постоянные, обозначим $\frac{S_{осн}}{h^2} = k$, тогда $S_{сеч} = kx^2$, то есть площадь сечения – квадратная функция от x, где x – расстояние плоскости сечения от вершины пирамиды.

З а д а ч а . В пирамиде сечение, параллельное основанию, делит высоту в отношении 2 : 3 (от вершины к основанию). Найти площадь сечения, зная, что оно меньше площади основания на 84 см².



Д а н о : $A_1B_1C_1 \parallel ABC$, $\frac{SO_1}{O_1O} = \frac{2}{3}$, $S_{осн} - S_{сеч} = 84$ см².

Найти $S_{сеч}$.

Р е ш е н и е

1) $\frac{S_{сеч}}{S_{осн}} = \frac{SO_1^2}{SO^2}$ (№ 267);

2) $S_{сеч} = x$; $S_{осн} = x + 84$, тогда из 1) $\frac{x}{x+84} = \left(\frac{SO_1}{SO}\right)^2$; $\frac{x}{x+84} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$; $\frac{x}{x+84} = \frac{4}{25}$; $25x = 4\,(x + 84)$; $21x = 4 \cdot 84$; $x = 4 \cdot 4 = 16$.

Ответ: $S_{сеч} = 16$ см².

IV. Решение задач: № 268.

Домашнее задание: теория (п. 34), №№ 269, 270.

У р о к 10
УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

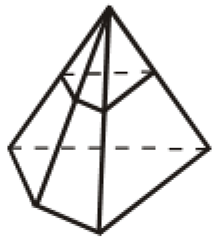
Ц е л ь : сформировать навык решения задач на усеченную пирамиду.

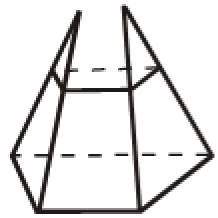
Х о д у р о к а

I. Проверка домашнего задания (№№ 269, 270).

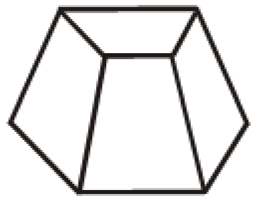
II. Устная работа.

1. Сравните изображения многогранников. Выделите признаки, характерные для усеченной пирамиды. Какой из этих многогранников не является усеченной пирамидой?

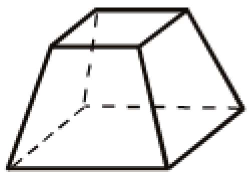


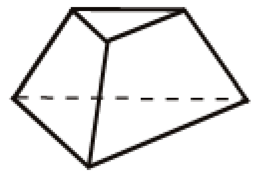


Как проверить, изображена ли усеченная пирамида?



Какие из следующих многогранников являются усеченными пирамидами?





призматоида

2. Как построить усеченную пирамиду?

3. В пирамиде проведено сечение параллельно основанию через середину высоты. Площадь основания равна Q. Найдите площадь сечения.

4. В тетраэдре через середины трех ребер проведено сечение плоскостью. Что можно сказать о расстоянии вершин тетраэдра до плоскости сечения?

5. Продолжите предложения:

а) основания усеченной пирамиды – …;

б) перпендикуляр, проведенный из любой точки одного основания усеченной пирамиды на плоскость другого, называется…;

в) в усеченной пирамиде боковые грани – …;

г) боковые грани правильной усеченной пирамиды…;

д) высота боковой грани усеченной пирамиды называется…

III. Решение задач.

1. В пирамиде сечение, параллельное основанию, делит высоту в отношении 3 : 4 (от вершины к основанию), а площадь сечения меньше площади основания на 200 см^2. Найти площадь основания.

2. На каком расстоянии от вершины пирамиды с высотой h надо провести сечение параллельно основанию, чтобы площадь сечения равнялась: 1) половине площади основания; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{n}$ площади основания.

3. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 7 см, стороны оснований 10 см и 2 см. Найти боковое ребро пирамиды и диагональ.

4. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды 4 дм и 1 дм, боковое ребро 2 дм. Найти высоту и апофему пирамиды.

5. Найти высоту правильных усеченных пирамид: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной. Даны стороны a и b нижнего и верхнего оснований и угол α наклона бокового ребра к большему основанию.

6. 1) В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны оснований равны a и b ($a > b$), двугранный угол при большем основании α. Найти высоту пирамиды. 2) То же, если пирамида треугольная.

7. 1) Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 4 см, стороны оснований 2 см и 8 см. Найти площадь диагонального сечения. 2) Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 4 см, диагональ 5 см. Найти площадь диагонального сечения.

8. В правильной усеченной треугольной пирамиде сторона большего основания a, сторона меньшего b, боковое ребро образует с основанием острый угол α. 1) Провести сечение через боковое ребро и центр нижнего основания; 2) найти его площадь.

9. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны основания равны 3 см и 5 см, высота 3 см. Провести сечение через противолежащие стороны оснований. Найти: 1) площадь сечения; 2) двугранный угол между сечением и нижним основанием.

Домашнее задание: теория (п. 34), №№ 313, 314.

Урок 11

СИММЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПОНЯТИЕ ПРАВИЛЬНОГО МНОГОГРАННИКА. ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИИ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Цель: ввести понятие правильного многогранника.

Ход урока

I. Объяснение нового материала.

О симметрии в пространстве учащиеся могут прочитать самостоятельно (п. 35).

Далее ввести понятие правильного многогранника. *(Рассматривая куб, правильный тетраэдр, правильный октаэдр и т. д., учащиеся отвечают на вопрос: по каким признакам можно объединить данные многогранники?)* Установить вместе с учащимися, сколько может быть видов правильных многогранников?

Пусть при одной вершине сходится n ребер, тогда плоских углов при этой вершине будет тоже n, причем они все равны между собой. Пусть один из этих плоских углов равен x, тогда сумма плоских углов при вершине nx, и по свойству плоских углов многогранного угла получим $nx < 360°$, откуда $x < \dfrac{360°}{n}$ (1).

Угол правильного n-угольника равен $\alpha = \dfrac{180°(n-2)}{n}$ (2).

I. Таблица значений $\dfrac{360°}{n}$						II. Таблица значений $\dfrac{180°(n-2)}{n}$				
	3	4	5	6	7		3	4	5	6
36	120°	90°	72°	60°	≈ 51°	$\dfrac{180°(n-2}{n}$	60°	90°	108°	120°

Начиная с $n = 7$ плоский угол станет меньше 60°, а такого правильного многоугольника не существует, поэтому остальные случаи рассматривать не будем.

I. Грани правильного многогранника – **правильные треугольники**, тогда $\alpha = 60°$ (таблица II).

1) $60° \cdot 3 = 180° < 360°$.

В этом случае правильный многогранник имеет 4 грани и называется **правильным тетраэдром**.

2) $60° \cdot 4 = 240° < 360°$.

В этом случае правильный многогранник имеет 8 граней и называется **правильным октаэдром**.

3) $60° \cdot 5 = 300° < 360°$.

В этом случае правильный многогранник имеет 20 граней и называется **правильным икосаэдром**.

4) $60° \cdot 6 = 360°$, это противоречит теореме о сумме плоских углов многогранного угла. Следовательно, больше правильных многогранников, грани которых – правильные треугольники, не существует.

II. Грани правильного многогранника – **правильные четырехугольники (квадраты)**, тогда $\alpha = 90°$ (таблица II).

1) $90° \cdot 3 = 270° < 360°$.

В этом случае правильный многогранник имеет 6 граней и называется **правильным гексаэдром (кубом).**

2) $90° \cdot 4 = 360°$, следовательно, больше правильных многогранников, грани которых – квадраты, не существует.

III. Грани правильного многогранника – **правильные пятиугольники**; $\alpha = 108°$.

1) $108° \cdot 3 = 324° < 360°$.

В этом случае правильный многогранник имеет 12 граней, и называется **правильным додекаэдром**.

2) $108° \cdot 4 > 360°$, следовательно, больше правильных многогранников, грани которых – правильные пятиугольники, не существует.

IV. Начиная с правильного шестиугольника $\alpha \geq 120°$ (таблица II).

Следовательно, $n\alpha > 360°$ ($n \geq 3$), поэтому правильных многогранников, грани которых – многоугольники с числом сторон больше 5, не существует.

Во время беседы демонстрировать модели правильных многогранников, показывать рисунки (есть в параграфе).

Последний пункт объяснения нового материала – элементы симметрии правильных многогранников.

II. Решение задач: №№ 279, 280, 281, 282, 287.

Домашнее задание: теория (п. 35–37), №№ 283, 285, 286.

Урок 12
ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ
Ход урока

Вариант I

1. В основании прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ со стороной a, и углом BAD, равным 60°. Плоскость BC_1D составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

2. В основании пирамиды $DABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC, $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $BC = 10$. Боковые ребра пирамиды равно наклонены к плоскости основания. Высота пирамиды равна 5. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3*. В указанной выше пирамиде найдите угол между прямыми AC и BD.

Вариант II

1. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм со сторонами 3 см и 5 см. Острый угол параллелограмма равен 60°. Площадь большего диагонального сечения равна 63 см^2. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

2. Основанием пирамиды $MABCD$ служит ромб $ABCD$, $AC = 8$; $BD = 6$. Высота пирамиды равна 1. Все двугранные углы при основании равны. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

3*. В указанной выше пирамиде найдите угол между гранями BMC и DMC.

Вариант III

1. В основании прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$, у которого $BD \perp AB$; $AB = 3$ см; $BD = 4$ см. Плоскость AB_1C_1 составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

2. В основании пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной, равной 12. Грани MBA и MBC перпендикулярны к плоскости основания. Высота пирамиды равна 5. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

3*. В указанной выше пирамиде найдите расстояние между прямыми BC и MD.

Вариант IV

1. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием служит параллелограмм $ABCD$, $AD = 2$, $DC = 2\sqrt{3}$, $\angle A = 30°$. Большая диагональ составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

2. Основанием пирамиды $MABC$ служит прямоугольный треугольник ABC, катеты которого $AC = 8$ см, $BC = 6$ см. Высота пирамиды равна $3\sqrt{5}$ см. Двугранные углы при основании пирамиды равны между собой. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

3*. В указанном выше параллелепипеде найдите угол между A_1C и плоскостью грани DD_1C_1C.

ДОМАШНЯЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант I

1. Сторона основания правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 4 см, а боковое ребро – 5 см. Найдите площадь сечения, которое проходит через ребро AA_1 и вершину C.

2. В правильной треугольной призме сторона основания равна 3 см, а диагональ боковой грани составляет с плоскостью основания угол 60°. Площадь боковой поверхности призмы равна…

3. В наклонном параллелепипеде основанием служит квадрат. Две противоположные боковые грани перпендикулярны к плоскости основания. Все ребра параллелепипеда равны 4 см. Найдите площадь каждой из наклонных боковых граней.

4. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием служит правильный треугольник со стороной, равной a. Боковое ребро равно b, $\angle A_1AC = \angle A_1AB$. Площадь грани CC_1B_1B равна…

5. В наклонной треугольной призме боковое ребро равно 10 см. Площади двух боковых граней равны 30 см^2 и 40 см^2, угол между ними прямой. Площадь боковой поверхности призмы равна…

6. В правильной четырехугольной пирамиде угол между диагональю основания и скрещивающимся с ней боковым ребром равен…

7. В правильной четырехугольной пирамиде угол между противоположными боковыми гранями равен 40°. Найдите угол наклона боковых граней к плоскости основания.

8. Основанием пирамиды служит треугольник со стороной, равной 8 см, и противолежащим углом 150°. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 45°. Высота пирамиды равна…

9. Основанием пирамиды служит трапеция, основания которой равны 2 см и 8 см. Боковые грани пирамиды равно наклонены к плоскости основания. Высота одной из боковых граней равна 10 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

10. В пирамиде $MABCD$ основанием служит квадрат со стороной, равной a. Грань MAB – правильный треугольник, плоскость которого перпендикулярна к плоскости основания. Площади граней MAD и MBC равны…

Вариант II

1. Сторона основания правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 3 см, а боковое ребро – 4 см. Найдите площадь сечения, которое проходит через сторону основания AD и вершину C_1.

2. В правильной треугольной призме боковое ребро равно 4 см, а диагональ боковой грани составляет с плоскостью основания угол 45°. Площадь боковой поверхности призмы равна…

3. В наклонном параллелепипеде основанием служит квадрат. Две противоположные боковые грани перпендикулярны к плоскости основания. Все ребра параллелепипеда равны между собой. Площадь наклонной боковой грани равна 25 см^2. Длина ребра параллелепипеда равна…

4. Основанием наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат со стороной, равной a. Боковое ребро равно b. Вершина A_1 равноудалена от всех вершин нижнего основания. Площадь диагонального сечения BB_1D_1D равна…

5. В наклонной треугольной призме боковое ребро равно 5 см. Площади двух боковых граней равны 20 см^2, угол между ними – 60°. Площадь боковой поверхности призмы равна…

6. В правильной треугольной пирамиде угол между скрещивающимися ребрами равен…

7. В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 50°. Угол между противоположными боковыми гранями пирамиды равен…

8. В пирамиде основанием служит треугольник со стороной 6 см и противолежащим углом 30°. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 60°. Длина бокового ребра равна…

9. Основанием пирамиды служит трапеция, боковые стороны которой равны 2 см и 4 см. Боковые грани пирамиды равно наклонены к плоскости основания. Высота одной из боковых граней равна 5 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

10. В пирамиде $MABCD$ основанием служит квадрат со стороной, равной 6 см. Ребро MB перпендикулярно к плоскости основания. Равные боковые ребра равны 8 см. Площадь наклонных боковых граней равна…

Урок 13

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Вариант I

1. Основанием пирамиды $DABC$ является правильный треугольник ABC, сторона которого равна a. Ребро DA перпендикулярно к плоскости ABC, а плоскость DBC составляет с плоскостью ABC угол в 30°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, сторона которого равна a и угол равен 60°. Плоскость AD_1C_1 составляет с плоскостью основания угол в 60°. Найдите:

а) высоту ромба;

б) высоту параллелепипеда;

в) площадь боковой поверхности параллелепипеда;

г) площадь поверхности параллелепипеда.

Вариант II

1. Основанием пирамиды $MABCD$ является квадрат $ABCD$, ребро MD перпендикулярно к плоскости основания, $AD = DM = a$. Найдите площадь поверхности пирамиды.

2. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$, стороны которого равны $a\sqrt{2}$ и $2a$, острый угол равен 45°. Высота параллелепипеда равна меньшей высоте параллелограмма. Найдите:

а) меньшую высоту параллелограмма;

б) угол между плоскостью ABC_1 и плоскостью основания;

в) площадь боковой поверхности параллелепипеда;
г) площадь поверхности параллелепипеда.

ГЛАВА 4 ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ 6 ЧАСОВ.

Урок 1
ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

Цель: ввести понятие вектора в пространстве.

Ход урока

I. При объяснении нового материала можно организовать работу учащихся с учебником (п. 38–39) по плану:

1. Что такое вектор?
2. Какой вектор называется нулевым?
3. Что такое длина вектора?
4. Какие векторы называются коллинеарными?
5. Какие векторы называются равными?

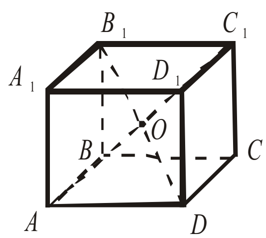
II. Решение задач: №№ 320 (а), 321 (а), 322, 323, 324, 325.
Домашнее задание: теория (п. 38–39), №№ 320 (б), 321 (б), 326.

Урок 2
ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ

Цель: ввести правила сложения и вычитания векторов, умножения вектора на число.

Ход урока

I. Устная работа.



Найдите векторы, начало и конец которых являются вершинами параллелепипеда:

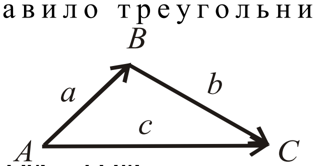
а) сонаправленные вектору $\overrightarrow{AI}$;

б) противоположнонаправленные вектору $\overrightarrow{AA}$;

в) равные вектору $\overrightarrow{A_1A}$.

II. Объяснение нового материала (п. 36 – 38).
I. Сумма векторов.

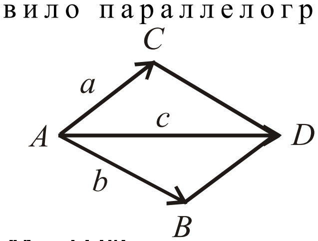
Правило треугольника



$$\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AN}$$

Суммой векторов, конец одного из которых является началом другого, называется вектор, начало которого – начало первого вектора, а конец – конец второго.

Правило параллелограмма



$$\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{AD}$$

Суммой двух векторов, начала которых совпадают, называется вектор, содержащий диагональ параллелограмма, построенного на данных векторах, и исходящий из общей точки векторов.

Правило многоугольника

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$$

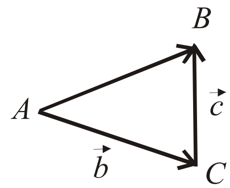
III. Решение задач: №№ 327, 328, 333 (а), 335 (а).

II. Два ненулевых вектора называются противоположными, если их длины равны и они противоположно направлены.

IV. Решение задач: № 329.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$, то есть $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$, $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$.

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.



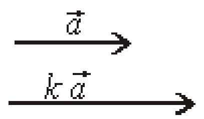
$$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$$

V. Решение задач: №№ 330, 331, 333 (б), 337 (б, в).

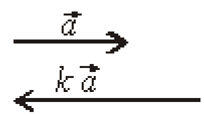
III. Умножение вектора на число.

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k|\cdot|\vec{a}|$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k < 0$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

1. $k > 0$



2. $k < 0$



Векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны для любого $\vec{a}$ и числа k, и наоборот, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b}=k\vec{a}$.

VI. Решение задач: №№ 343, 344, 347 (а).

Домашнее задание: теория (п. 40–42). №№ 334, 335 (б, в, г), 336, 347 (б).

Урок 3

ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ

Цель: сформировать навык действий над векторами в пространстве.

Ход урока

I. Устная работа. №№ 327, 328, 329, 332 (предварительно рисунки и условие вынести на доску).

II. Решение задач: №№ 339, 341, 345, 348, 349, 351, 352.

№ 352.

$\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ – коллинеарны $\Rightarrow$ $\vec{a}+\vec{b}=k(\vec{a}-\vec{b})$.

Имеем $\vec{a}(1-k)=\vec{b}(-1-k)$, $\vec{a}=\dfrac{-1-k}{1-k}\vec{b}$ или $\vec{a}=m\vec{b}$.

Следовательно, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Домашнее задание: теория (п. 40–42), №№ 340, 346, 353.

Урок 4

КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

Цели: ввести понятие компланарных векторов, правило сложения для трех некомпланарных векторов; доказать теорему о разложении любого вектора по трем некомпланарным векторам.

Ход урока

I. Объяснение нового материала построить в соответствии с пунктами 39 – 41 учебника.

II. Решение задач.

№№ 355, 356, 358 (а, б), 360 (а), 361.

Домашнее задание: теория (п. 43–45), №№ 357, 358 (в, г, д), 360 (б), 362.

Урок 5

КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

Цель: сформировать навык разложения вектора по трем некомпланарным векторам.

Ход урока

Решение задач: №№ 363, 364, 365, 367.

Домашнее задание: №№ 366, 368, 369.

Урок 6

ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Цель: подготовить учащихся к контрольной работе.

Ход урока

Вариант I

1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Изобразите на рисунке векторы, равные:

1) $\overrightarrow{ÂÑ} + \overrightarrow{Ñ_1D_1} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{D_1A_1}$;

2) $\overrightarrow{D_1C_1} - \overrightarrow{A_1B}$.

2. В тетраэдре $DABC$ точка E – середина DB, а M – точка пересечения медиан грани ABC. Разложите вектор $\overrightarrow{EM}$ по векторам $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

3. Даны три неколлинеарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите значение k, при котором векторы $\vec{m} = k\vec{a} + k^2\vec{b} + 2\vec{c}$ и $\vec{n} = \vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}$ коллинеарны.

4*. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F – середины отрезков BD и C_1C. Докажите, используя векторы, что прямые BC_1, EF и DC параллельны одной плоскости.

Вариант II

1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Изобразите на рисунке векторы, равные:

1) $\overrightarrow{ÀÂ} + \overrightarrow{Â_1Â} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$;

2) $\overrightarrow{D} - \overrightarrow{}_1$.

2. В тетраэдре $DABC$ M – точка пересечения медиан грани ACD, а K – середина AB. Разложите вектор $\overrightarrow{KM}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

3. Докажите, что векторы $\vec{m} = k\vec{a} + k^2\vec{b} + 2\vec{c}$, $\vec{n} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ и $\vec{p} = 3\vec{a} - 4\vec{b} - 5\vec{c}$ компланарны.

4*. В пространстве расположен параллелограмм $ABCD$ и произвольный четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников A_1BB_1, B_1CC_1, C_1DD_1 и A_1AD_1 являются вершинами параллелограмма.

Домашнее задание: карточки.

Вариант I

1. $DABC$ – правильная треугольная пирамида. Сторона основания равна $\sqrt{3}$. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 60°. Найдите: $\left|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}\right|$.

2. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найдите: $\left|\overrightarrow{DC_1} - \overrightarrow{DA_1}\right|$.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. AC_1 пересекает B_1D в точке M. $\overrightarrow{B_1D} =$. Найдите x.

4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. Укажите какой-нибудь вектор с началом и концом в вершинах параллелепипеда, который был бы компланарен с векторами $\overrightarrow{ÀA_1}$ и $\overrightarrow{ÀÑ}$.

5. $\overrightarrow{ÀÑ} = õ\overrightarrow{ÀÂ} + y\overrightarrow{AD}$. Могут ли прямые AC и BD быть скрещивающимися?

6. $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; $\vec{n} = 2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$; $\vec{p} = 3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$; $\vec{k} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$. Укажите тройку компланарных векторов.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. Найдите: $\overrightarrow{ÀÂ} + \overrightarrow{ÀÑ} + \overrightarrow{ÀA_1}$.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. D_1C пересекает C_1D в точке M. Выразите вектор $\overrightarrow{AI}$ через векторы $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{A\tilde{N}}$.

9. $PABCD$ – пирамида, $ABCD$ – параллелограмм, $\overrightarrow{ĐA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{Đ\hat{A}} = \vec{b}$; $\overrightarrow{Đ\tilde{N}} = \vec{c}$. Выразите вектор $\overrightarrow{PD} = \vec{x}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

10. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ отрезок DO – высота. Разложите вектор $\overrightarrow{DO}$ по векторам $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

Вариант II

1. Основанием пирамиды $MABC$ служит прямоугольный треугольник ACB ($\angle C = 90°$); $AC = 6$; $BC = 8$. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 60°. Найдите: $\left|\overrightarrow{A\tilde{N}} + \overrightarrow{\hat{A}I} + \overrightarrow{\tilde{N}\hat{A}}\right|$.

2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 1, точка E – середина A_1C_1. Найдите: $\left|\overrightarrow{\tilde{N}\mathring{A}} - \overrightarrow{\tilde{N}\hat{A}_1}\right|$.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, A_1C пересекает B_1D в точке M. $\overrightarrow{A_1\tilde{N}} = \tilde{o}\overrightarrow{\tilde{N}I}$. Найдите x.

4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, E и F – середины AD и CD соответственно. Будут ли компланарны векторы $\overrightarrow{A\tilde{N}}$, $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{DD_1}$?

5. $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; $\vec{n} = -\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$; $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$; $\vec{k} = 3\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$. Укажите тройку компланарных векторов.

6. $\overrightarrow{A\tilde{N}} \neq \tilde{o}\overrightarrow{A\hat{A}} + y\overrightarrow{AD}$. При всех x и y $\overrightarrow{A\hat{A}}$ и $\overrightarrow{AD}$ не являются коллинеарными. Могут ли пересекаться прямые AC и BD?

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. Найдите: $\overrightarrow{\tilde{N}_1A_1} + \overrightarrow{\tilde{N}_1D_1} + \overrightarrow{\tilde{N}_1\tilde{N}}$.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. AB_1 пересекает A_1B в точке E. Выразите вектор $\overrightarrow{DE}$ через векторы $\overrightarrow{DB_1}$ и $\overrightarrow{DA}$.

9. В пирамиде $EABCD$ основанием служит параллелограмм $ABCD$. $\overrightarrow{EB} = \vec{m}$; $\overrightarrow{EC} = \vec{n}$; $\overrightarrow{ED} = \vec{p}$; $\overrightarrow{EA} = \vec{y}$. Выразите вектор $\vec{y}$ через векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$.

10. В тетраэдре $DABC$ отрезки DE и CF – медианы грани BDC. DE пересекает CF в точке O. Выразите вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{A\tilde{N}}$ и $\overrightarrow{A\hat{A}}$.

Урок 7
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5
Ход урока

Вариант I

1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Изобразите на рисунке векторы, равные:

1) $\overrightarrow{A\tilde{N}_1} + \overrightarrow{DA_1} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{\hat{A}A}$;

2) $\overrightarrow{\hat{A}A} - \overrightarrow{B_1\tilde{N}_1}$.

2. В тетраэдре $DABC$ M – точка пересечения медиан грани BDC, E – середина AC. Разложите вектор $\overrightarrow{EM}$ по векторам $\overrightarrow{A\tilde{N}}$, $\overrightarrow{A\hat{A}}$ и $\overrightarrow{AD}$.

3. Даны три неколлинеарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите значения p и g, при которых векторы $\vec{m} = \quad + \quad + 8$ и $\vec{n} = \vec{a} + p\vec{b} + g\vec{c}$ коллинеарны.

4*. В тетраэдре $DABC$ точки M и H – середины соответственно ребер AD и BC. Докажите, используя векторы, что прямые AB, HM и DC параллельны одной плоскости.

Вариант II

1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Изобразите на рисунке векторы, равные:

1) $\overrightarrow{\hat{A}_1\tilde{N}_1} + \overrightarrow{\grave{A}\hat{A}} + \overrightarrow{C\tilde{N}_1} + \overrightarrow{\hat{A}_1A}$;

2) $\overrightarrow{D\quad} - \overrightarrow{\quad_1}$.

2. В тетраэдре $DABC$ точка E – середина ребра AD, а M – точка пересечения медиан грани BDC. Разложите вектор $\overrightarrow{EM}$ по векторам $\overrightarrow{\grave{A}\hat{A}}$, $\overrightarrow{\grave{A}\tilde{N}}$ и $\overrightarrow{AD}$.

3. Докажите, что векторы $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{n} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ и $\vec{p} = 8\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ компланарны.

4*. В тетраэдре $DABC$ точки M и N – середины AB и CD соответственно. Докажите, что середины отрезков MC, MD, NA и NB являются вершинами параллелограмма.

ПОВТОРЕНИЕ 2 ЧАСА

Уроки 1–2

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ ЗА 10 КЛАСС

Цель: систематизация полученных учащимися знаний.

Ход уроков

I. Организовать повторение и систематизацию материала, используя литературу:

1. Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс геометрии. – М.: Просвещение, 1992.
2. Зив Б. Г. Задачи к урокам геометрии. 7–11 классы. – СПб., 1998.
3. Зив Б. Г., Мейлер В. М., Баханский А. Г. Задачи по геометрии: пособие для учащихся 7–11 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 1997.

II. Решение задач.

1. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ сторона основания равна 6, а боковое ребро 5. Найдите:

1) площадь боковой поверхности пирамиды;

2) угол наклона боковой грани к плоскости основания;

3) скалярное произведение векторов $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{\quad}) \cdot \overrightarrow{\quad}$;

4)* угол между BD и плоскостью DMC.

2. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ сторона основания равна $4\sqrt{3}$, а боковое ребро 5. Найдите:

1) площадь боковой поверхности пирамиды;

2) угол между боковым ребром и плоскостью основания;

3) скалярное произведение векторов $\frac{1}{2}(\overrightarrow{I\ \grave{A}} + \overrightarrow{I\ \tilde{N}}) \cdot \overrightarrow{\grave{A}\hat{A}}$, где E – середина BC;

4)* угол между стороной основания и плоскостью боковой грани.

3. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ боковое ребро равно 8 и наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найдите:

1) площадь боковой поверхности пирамиды;

2) угол между противоположными боковыми гранями;

3) скалярное произведение векторов $\frac{1}{2}(\overrightarrow{I\ \grave{A}} + \overrightarrow{I\ \tilde{N}}) \cdot \overrightarrow{I\ \mathring{A}}$, где E – середина DC;

4)* угол между боковым ребром AM и плоскостью DMC.

4. В правильной треугольной пирамиде *MABC* сторона основания равна $2\sqrt{3}$, а боковые грани наклонены к основанию под углом 60°. Найдите:

1) площадь боковой поверхности пирамиды;

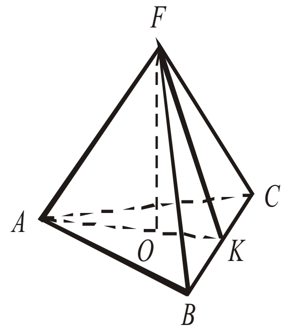
2) угол между боковым ребром и плоскостью основания;

3) скалярное произведение векторов $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{OM}$, где *O* – основание высоты пирамиды;

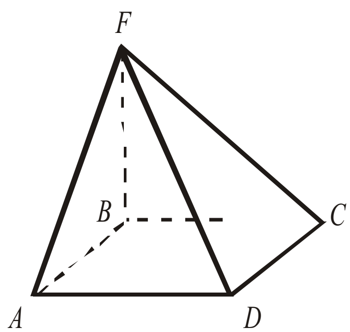
4) угол между *ME*, где *E* – середина *BC*, и плоскостью *AMC*.

III. Устную работу можно организовать, попросив учащихся на основании синтеза предложений p_1, p_2, … p_i сформулировать как можно больше положений о взаимном расположении прямых и плоскостей.

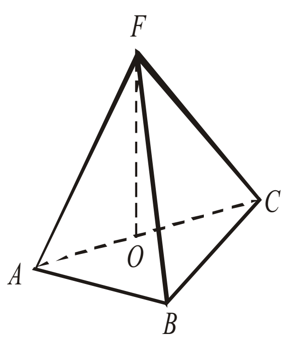
Составить задачу с исходными данными. Дав время для составления предложений, начать опрос с того учащегося, который составил наименьшее их количество.



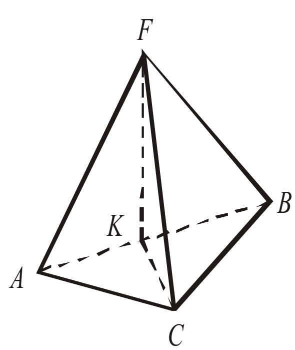
1. *FABC* – пирамида.
p_1: Δ *ABC* – правильный;
p_2: $OF \perp (ABC)$;
p_3: *O* – центр описанной около Δ *ABC* окружности.



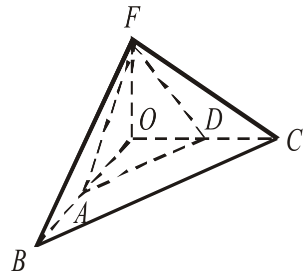
2. *FABCD* – пирамида.
p_1: *ABCD* – прямоугольник;
p_2: $FB \perp (ABC)$.



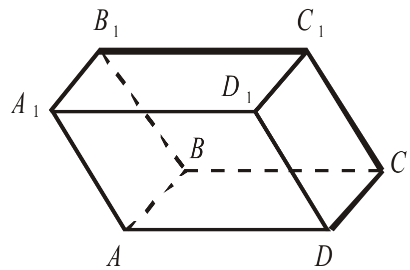
3. *FABC* – пирамида.
p_1: $FA = FB = FC$;
p_2: $OF \perp (ABC)$;
p_3: $AO = OC$.



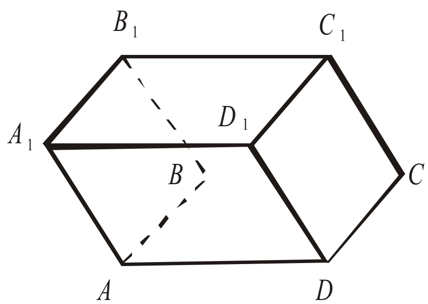
4. *FABC* – пирамида.
p_1: $FK \perp AB$;
p_2: $FC \perp AB$;
p_3: двугранный угол *FABC* прямой.



5. $FABC$ – пирамида.
p_1: $(FAB) \perp (FDC)$;
p_2: $(FAB) \perp (ABC)$;
p_3: $(FDC) \perp (ABC)$.



6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – призма.
p_1: $ABCD$ – прямоугольник;
p_2: AA_1B_1B – прямоугольник.



7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – призма.
p_1: $ABCD$ – квадрат;
p_2: боковые грани – ромбы.